الدكتور

جلاطو جيلالي

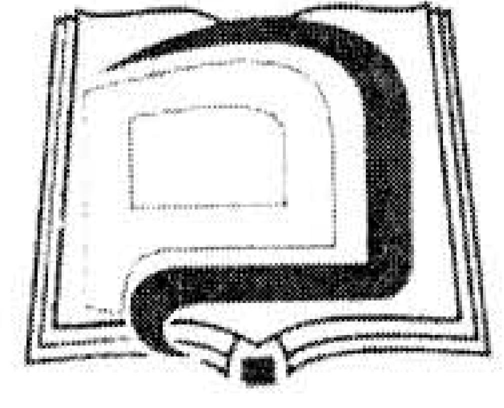
الإحصـــاء

مع

تمارين محلولة

الطبعة التاسعة

مزيدة ومنقحة



ديوان المطبوعات الجامعية

الكتب الصادرة عن ديوان المطبوعات الجامعية لنفس المؤلف:

- الإحصاء التطبيقي (2007).

رقم النشر: 4.01.4313
رقم ر.د.م.ك(ISBN): 978.9961.0.0422.7
رقم الإيداع القانوني: 1999-1017

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :

نتطرق في هذا المقياس إلى الإحصاء الوصفي الذي يعالج المرحلة الأولى من الطريقة الإحصائية التي تتضمن ثلاث مراحل:

1- المرحلة الوصفية.

2- المرحلة التنبؤية.

3- مرحلة اتخاذ القرار.

اقتصرنا في هذا البرنامج على محاور أساسية منها: العرض الجدولي والبياني، خصائص النزعة المركزية، خصائص التشتت والشكل، الأرقام القياسية، الانحدار الخطي البسيط والارتباط وأخيرا مدخل إلى السلاسل الزمنية.
إن الهدف من اختيار هذه المحاور، هو تمكين القارئ من التكيف والتعامل مع الدراسة الإحصائية بسهولة وبساطة. هذه الدراسة التي يحتاج إليها كل طالب مهما كان تخصصه.
لقد عمدت في نهاية كل فصل إلى عرض مجموعة من التمارين التطبيقية مرفقة بحلول مختصرة، والتي كانت قد قدمت معظمها في امتحانات السنة الأولى (ليسانس) لمعهد العلوم الاقتصادية (جامعة الجزائر)، والمعهد الوطني للتخطيط والإحصاء، والمعهد الوطني للتجارة.

إن موضوع الإحصاء هو جمع وترتيب وتنسيق وتنظيم مجموعة من حوادث متجانسة أو من نفس الصنف، يمكن من خلالها الحصول على علاقات عددية مستقلة عن انحرافات الصدفة والتي تبين وجود أسباب منتظمة بتأثيرات منظمة.

أما الإحصاء فهو علم جمع وترتيب معلومات خاصة بظاهرة معينة وقياس الوقائع كأساس للاستقراء، فأما الوظيفة الأساسية للإحصاء هي جمع

وعرض وتحليل المعطيات والتنبؤ بقيم الظاهرة المدروسة مستقبلا وفق شروط معينة ثم اتخاذ القرار المناسب.

تستعمل الطريقة الإحصائية في كل المجالات والتخصصات، في العلوم الاجتماعية والعلوم الدقيقة والاقتصاد والتجارة... الخ، وخاصة إذا تعلق الأمر بالظواهر القابلة للقياس أي الظواهر التي يمكن قياسها عدديا لأن كل الظواهر، مهما كانت طبيعتها وتصنيفها، يمكن قياسها. يقول Jean -Jacques Droesberke "إن الأرقام لا تحكم العالم فقط بل تبين كيف نتحكم فيه".

تمكن الدراسة الإحصائية من تبسيط ظاهرة معينة خلال فترة زمنية محدودة على شكل جدول (العرض الجدولي) أو على شكل بياني (العرض البياني) أو على شكل عدد(العرض العددي).

تهدف الطريقة الإحصائية إلى دراسة معطيات ظواهر معينة في فترات سابقة لإيجاد حلول مناسبة لمشاكل الحاضر والتنبؤ بقيمها في المستقبل، إذا بقت نفس الظروف على حالها.

يشكل هذا الكتاب مدخلا إلى الطريقة الإحصائية، حيث يركز أساسا على المرحلة الأولى منها. أما الكتاب الثاني والذي يعالج المرحلة الثانية من هذه الطريقة فقد تم انجازه وطبعه تحت عنوان: الإحصاء التطبيقي في سنة 2007 بفضل الله سبحانه وتعالى.

د. جيلالي جلاطو
كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير
جامعة الجزائر 3
2011/09/ 18

الفصل الأول

عرض البيانات الإحصائية

Représentation Graphique

1- بعض المفاهيم الأساسية:

أ- **الوحدة الإحصائية:**(Unité statistique) هي الوحدة الأساسية لتكوين المجتمع الإحصائي.

ب- **المجتمع الإحصائي:**(Population) هو مجموعة المشاهدات والقياسات الخاصة بمجموعة من الوحدات الإحصائية والتي تخص ظاهرة من الظواهر القابلة للقياس: مجتمع من الطلبة، مجتمع من الأسر، مجتمع من المؤسسات...الخ.

ج- **الظاهرة الإحصائية:**(Phénomene statistique) هي الخاصية المدروسة أو المتغير المدروس في المجتمع الإحصائي مثلا: طول القامة، السن، الوزن، العلامة المتحصل عليها في امتحان معين، الإنتاج، الادخار، الاستثمار، الاستهلاك،...الخ.

د- **العينة:** (Echantillon) هي جزء من المجتمع الإحصائي، ولكن ليس أي جزء، إنه الجزء الذي يمثل المجتمع أحسن تمثيل. يختلف حجم العينة حسب أهمية الدراسة وحسب الإمكانيات المادية والبشرية المتاحة للقيام بهذه الدراسة. إن الاعتماد على أسلوب العينة متبع في أغلب الدراسات الميدانية وهذا لاستحالة جمع المعلومات الإحصائية من كل الوحدات التي تشكل المجتمع المدروس أو بما يسمى بالحصر الشامل.

2- أنواع العينات: نقتصر على ذكر ثلاثة أنواع من العينات

أ- العينة العشوائية: (Echantillon Aléatoire) تعتبر العينة العشوائية من أكثر العينات استعمالا، وهي جزء لا على التعيين من المجتمع المدروس، وتخص العينة العشوائية المجتمعات المتجانسة أي تلك التي لها خصائص متشابهة أو متقاربة مثلا: مجتمع من الإطارات المتوسطة يشكل مجتمع متجانس من حيث المداخل المتحصل عليها، مجتمع من الطلبة يشكل مجتمعا متجانسا من حيث السن وهكذا...إذن تسحب العينة العشوائية من مجتمع متجانس.

ب- العينة الطبقية: (Echantillon stratifié): تخص المجتمعات غير المتجانسة أي المجتمعات المتكونة من عدة فئات اجتماعية- مهنية وهذا بناءا على عدة اعتبارات منها: مستوى الدخل، مستوى الإنفاق، المستوى التعليمي...الخ. إن العينة الطبقية هي عبارة عن مجموعة من العينات العشوائية.

ج- العينة ذات المراحل المتعددة: تستعمل مثل هذه العينات عند دراسة المستوى التعليمي في بلد ما: مثلا لدراسة المستوى التعليمي للمرحلة النهائية للتعليم الثانوي نتبع الخطوات التالية:

- نسحب ولاية بطريقة عشوائية من أصل مجموع الولايات.
- نسحب دائرة من أصل الدوائر التي تتكون منها الولاية المسحوبة.
- نسحب ثانوية من أصل الثانويات المتواجدة في الدائرة المختارة.
- يسحب قسم من الأقسام النهائية على مستوى الثانوية المسحوبة لتجرى عليه الدراسة.

3- أنواع الخصائص أو المتغيرات:

تنقسم المتغيرات الإحصائية إلى قسمين:

أ- **متغيرات كيفية**:(Variables qualitatives) هي تلك المتغيرات التي لا يمكن قياسها كميا أو غير قابلة للقياس عدديا مثل الجنسية، الحالة العائلية، الحالة المدنية...الخ.

ب- **متغيرات كمية:** (Variables quantitatives) هي تلك الخصائص التي يمكن قياسها وهي أكثر المتغيرات انتشارا واستعمالا لأن لغة الإحصاء هي لغة الأرقام، مثال لذلك: الإنتاج، الاستهلاك، الاستثمار، الوزن ...الخ. وتنقسم المتغيرات الكمية بدورها إلى قسمين: متغيرات منقطعة، ومتغيرات مستمرة.

- **متغيرات منقطعة:** (Variables discrètes) وهي تلك المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة، لا يمكن تجزئتها مثلا عدد الأطفال في العائلة، عدد قطع الغيار المنتجة ...الخ.

- **متغيرات مستمرة:** (Variables continues) وهي تلك المتغيرات التي تأخذ كل القيم الممكنة لمجال الدراسة، و نظرا للعدد غير المتناهي لهذه القيم نقسم مجال الدراسة إلى مجالات جزئية تسمى الفئات.

4- مصادر المعلومات الإحصائية:

يعتمد الباحثون على مصدرين للحصول على المعلومات الإحصائية الخاصة بظاهرة معينة، الأول مباشر والثاني غير مباشر.

أ- **المصدر المباشر:** يمكن الحصول على المعطيات الإحصائية بواسطة طريقتين،

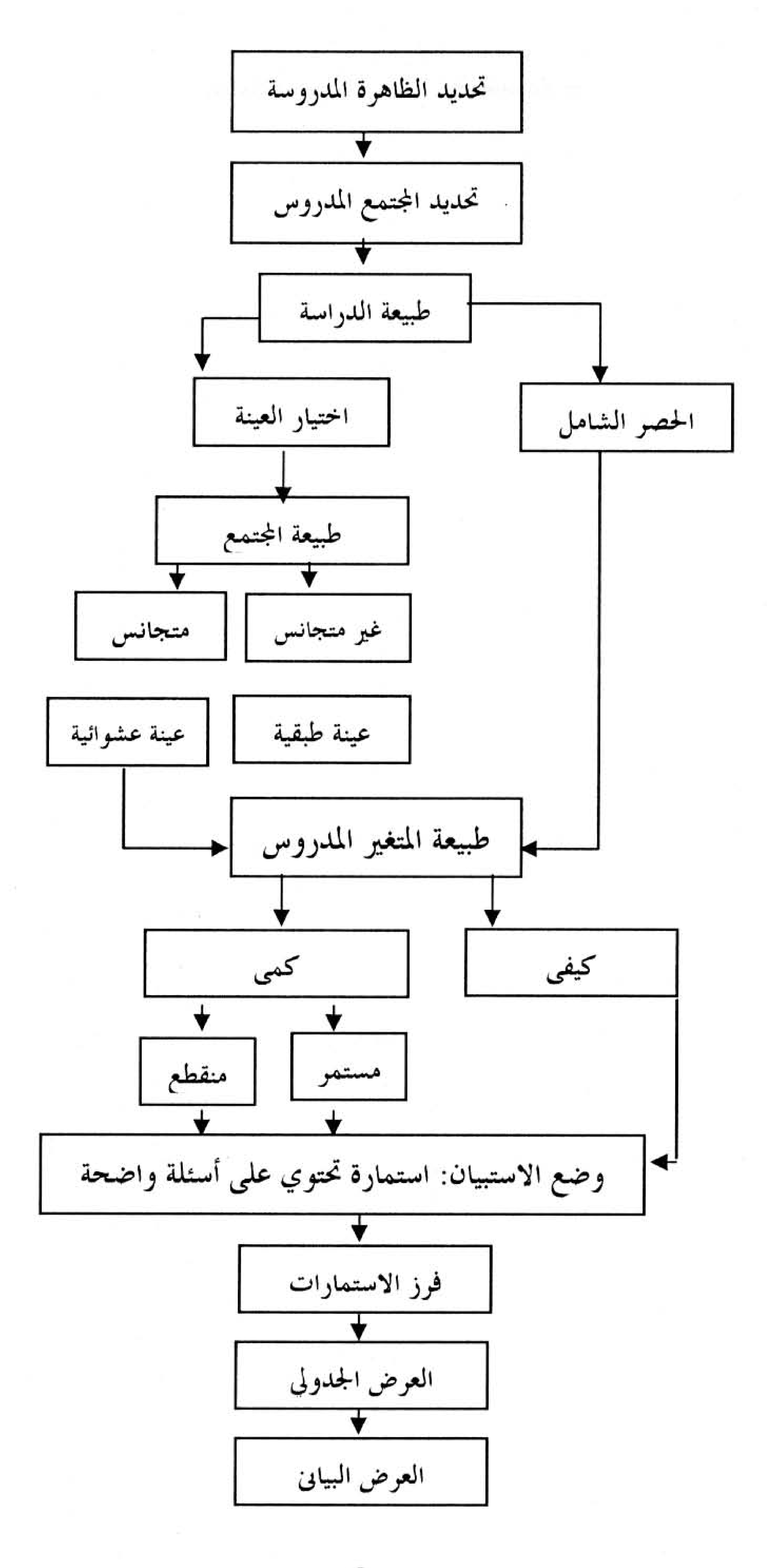
- **الطريقة المباشرة:** يقوم الباحث بوسائله الخاصة بإجراء دراسة ميدانية على كل الوحدات التي تشكل المجتمع المدروس أو بما يسمى بالحصر الشامل، ولكن هذه الطريقة تصبح مستحيلة في كثير من الحالات.

- **الطريقة غير المباشرة:** وعند استحالة تطبيق الطريقة المباشرة، يقوم الباحث بانتقاء أو اختيار عينة من المجتمع المدروس أو بما يسمى بالمعاينة ثم يعمم نتائج الدراسة على المجتمع ككل وفق طرق وأساليب إحصائية معينة.

ب- المصدر غير المباشر: يتحصل الباحث على المعلومات الإحصائية من الدراسات والتحقيقات المنشورة على صفحات الجرائد، الكتب، والوثائق والتقارير الخاصة...الخ، و لكن هدف الباحث يختلف بصفة عامة عن هدف الهيئات التي قامت بهذه الدراسات، ولذلك فالبيانات المتحصل عليها من المصدر غير المباشر تكون في بعض الأحيان غير هامة.

5- المرحلة القبلية لعرض المعلومات الإحصائية:

تأتي عملية عرض المعلومات في مرحلة تالية لمرحلة تحديد الظاهرة المدروسة والمجتمع ونوع المتغير وطبيعة السحب (سحب العينة) وعملية تحضير الاستبيان وعملية الفرز ثم تفريغ المعطيات الأولية في جداول أولية وأخيرا توضع المعطيات الأولية في جداول نهائية تسمى بجداول المعطيات والمخطط التالي يبين مختلف المراحل الهامة القبلية لعملية العرض الجدولي:


تحديد الظاهرة المدروسة
تحديد المجتمع المدروس
طبيعة الدراسة
اختيار العينة
الحصر الشامل
طبيعة المجتمع
متجانس
غير متجانس
عينة عشوائية
عينة طبقية
طبيعة المتغير المدروس
كمي
كيفي
منقطع
مستمر
وضع الاستبيان: استمارة تحتوي على أسئلة واضحة
فرز الاستمارات
العرض الجدولي
العرض البياني

ملاحظة: توجد عدة طرق للحصول على المعلومات الإحصائية، وهذا يتوقف على طبيعة الدراسة منها: الاتصال المباشر بالوحدة الإحصائية لملئ الاستبيان، أو عن طريق البريد، الهاتف...الخ.

أما إذا كان الأمر يتعلق باستطلاع للرأي(Sondage) ينزل المستجوب إلى الشارع ويتصل بالمارة مثلا، غير أن هذه الطرق والأساليب تختلف من بلد إلى أخر حسب تطور أجهزته المعلوماتية والإحصائية فمثلا توجد في الدول المتقدمة أجهزة مختصة تقوم بدراسات دائمة انطلاقا من عينات ممثلة للمجتمع، ففي فرنسا يوجد معهد يقوم بمثل هذه الدراسات (INSEE)، أما في الجزائر فيوجد الديوان الوطني للإحصائيات يصدر إحصائيات رسمية لا تعبر عن الواقع في بعض الأحيان.

6- كيفية سحب عينة عشوائية وطبقية:

أ- **عينة عشوائية:** لسحب عينة عشوائية يمكن استعمال الطريقة التقليدية التي تعتمد على البطاقات والاحتمالات المتساوية، غير أن هذه الطريقة، أصبحت غير عملية بعد ظهور الإعلام الآلي حيث استبدلت بجداول الأعداد العشوائية واستعمالها لا يتطلب إمكانيات مادية إلا جدول الأعداد العشوائية الموجود في نهاية كل كتاب إحصاء، ويستعمل هذا الجدول بالشكل التالي:

- يحدد حجم المجتمع الإحصائي (N) و يرقم من 1 إلى N.
- يحدد حجم العينة **n** ويرقم من 1 إلى n (تحدد n حسب الإمكانيات المتاحة و حسب أهمية الدراسة).

- تختار الأرقام من اليمين أو اليسار أو الوسط حسب حجم المجتمع N فمثلا إذا كان N= 1000 فإننا نختار ثلاثة أرقام الأولى أو الوسطى أو الأخيرة من العدد العشوائي، إن هذه الأرقام تعبر عن مرتبة الوحدة الإحصائية ، حيث تعاد العملية **n** مرة.

وبعد الانتهاء من عملية السحب وبعد التعرف على الوحدات الإحصائية التي تشكل العينة ننتقل إلى مرحلة وضع الاستبيان بصفة دقيقة، ثم يتم الاتصال المباشر بالوحدات الإحصائية، حيث تملأ الاستمارات وعندئذ يتم فرزها، لتوضع المعلومات الأولية في جداول أولية.

ب- عينة طبقية: تستعمل العينات الطبقية في حالة مجتمعات غير متجانسة أي في حالة وجود تفاوت كبير بين الوحدات الإحصائية بالنسبة للخاصية المدروسة، **مثلا:** وجود اختلاف كبير في مستوى الدخل بين الفئات التي تكون المجتمع الإحصائي، وفي هذه الحالة نقسم المجتمع إلى فئات متجانسة حيث تحدد نسبة أو أهمية كل فئة بالنسبة للمجتمع، ليصبح حجم كل منها على التوالي:

$N_1; N_2; N_3; ....; N_i$ حيث أن **i** هي عدد الفئات التي يتكون منها المجتمع، ولاختيار أو سحب عينة طبقية نتبع الخطوات التالية:

- نحدد نسبة كل فئة بالنسبة للمجتمع $\frac{N_i}{N}$.

- نحدد حجم العينة التي نريد سحبها: n.

- نحدد عدد الوحدات الإحصائية التي يجب سحبها من كل فئة: ni حسب النسب المحددة في (أ) حيث أن : $n_i = n \cdot \frac{N_i}{N}$.

- نقوم بسحب n_i من N_i بالطريقة العشوائية باستعمال جدول الأعداد العشوائية، و عندما تتم العملية نضم كل الوحدات الإحصائية المسحوبة إلى بعضها البعض لنكون عينة طبقية.

مثال: لدينا مجتمعا يتكون من $N = 1000$ وحدة إحصائية ولاحظنا أنه يتشكل من 3 فئات اجتماعية حيث أن:N_1= N_3 ; $N_2 = 400$; 250 علما أن $n = 280$ المطلوب تحديد n_i ؟.

- نحدد نسبة كل فئة إلى المجتمع:

$$\frac{N_3}{N} = \frac{350}{1000} = 0.35 \text{ ، } \frac{N_2}{N} = \frac{400}{1000} = 0.4 \text{ ، } \frac{N_1}{N} = \frac{250}{1000} = 0.25$$

- نقوم بسحب n_i من N حيث أن : $n_1 = \frac{N_1}{N} \cdot n = 208 \times 0.25 = 70$

$n_3 = n\,\frac{N_3}{N} = 0.35 \times 280 = 98$. ، $n_2 = n\,\frac{N_2}{N} = 0.4 \times 280 = 112$

7- العرض الجدولي (Representation par tableaux)

يقوم الباحث بتفريغ النتائج المتحصل عليها في جداول أولية بعد الانتهاء من عملية فرز الاستمارات، ثم يلخصها في جداول نهائية تسمى جداول المعطيات.

- **تعريفه:** هو عبارة عن وضع المعلومات الإحصائية في جداول نهائية، يحتوي كل منها على عمودين (سطرين) يبين العمود(السطر) الأول قيم الظاهرة أو المتغير المدروس، و تكون هذه القيم على شكل قيم نقطية أو على شكل مجالات، أما العمود (السطر) الثاني فيحتوي على تكرارات هذه القيم أو المجالات.

أ- العرض الجدولي في حالة خاصية واحدة:

- **جدول التكرارات لخاصية كمية منقطعة:** الخاصية الكمية المنقطعة أو المتغير الكمي المنقطع هو ذلك المتغير الذي لا يمكن تجزئة قيمه، حيث يأخذ قيما صحيحة.

مثال: لدراسة متوسط عدد الأطفال في العائلة في مجتمع ما، أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 100$ ، فكانت النتائج كالتالي:

ج:1.1

عدد الأطفال	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
عدد العائلات	10	12	16	18	17	14	8	5	100

حيث أن x_i : قيم المتغير الإحصائي، n_i : تكرارات هذه القيم.

ب- حالة متغير كمي مستمر:

عند دراسة متغير كمي مستمر، يضم مجال الدراسة مالا نهاية من القيم، ولتعذر وضع كل هذه القيم، نقسم هذا المجال إلى مجالات جزئية تسمى الفئات، حيث يحدد عدد هذه الفئات حسب حجم العينة وحسب توزيع الوحدات الإحصائية على مجال الدراسة، ولكن وقصد تسهيل العملية وضع الإحصائي ستورج (Sturge) قاعدة تجريبية لتحديد طول الفئات وتعتمد هذه القاعدة على مجال الدراسة و حجم المجتمع أو العينة:

$$K = \frac{E}{1 + 3.32 \log n}$$

(اللوغارتم العشري)

$$K = \frac{E}{1 + 1.32 \ln(n)}$$

(اللوغارتم النيبري)

n حجم العينة أو المجتمع، E المدى العام وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة: $E = x_n - x_1$، K طول الفئة، (1+ 3.32log n) عدد الفئات.

ملاحظة: تعتبر الفئة جزء من مجال الدراسة، حيث لا يوجد طول متفق عليه لهذه الفئة، كما أنه لا يوجد عدد متفق عليه من الفئات لتوزيع إحصائي معين، ولكن يتحدد عدد الفئات وطولها حسب أهمية الدراسة وطول مجال التعريف وحجم العينة أو المجتمع. وللحفاظ على توازن جدول التكرارات من الأفضل أن يتراوح عدد الفئات من 9 إلى 25 فئة. كما يستحسن أن تكون أطوال الفئات متساوية حتى يمكن مقارنة الظاهرة من مجال إلى مجال أخر.

وكما أن قاعدة [Sturge] ليست إجبارية بل على الباحث اختيار طول الفئة المناسب.

مثال: لدراسة ظاهرة تأخر العمال عن الالتحاق بعملهم في بداية الفترة الصباحية، لوحظ أن 75 عاملا التحقوا متأخرين عن العمل في مؤسسة ما و في يوم معين، والجدول التكراري التالي يبين ذلك:

ج:1.2

الفئات	التكرار
0−5	4
5−10	7
10−15	10
15−20	15
20−25	18
25−30	12
30−35	6
35−40	3
$\sum$	75

نلاحظ أن طول الفئة يساوي $K = 5$.

- جدول التكرارات التجميعية: Tableau des fréquences cumulées

يمكن أن نميز بين ثلاثة أنواع من التكرارات:

أولا- التكرار المطلق وهو التكرار العادي.

ثانيا- التكرار النسبي وهو عبارة نسبة مئوية.

ثالثا- التكرارات التجميعية، وهذه الأخيرة تنقسم إلى قسمين:

- **التكرارات التجميعية الصاعدة:** التكرار التجميعي الصاعد لأي فئة هو عبارة عن تكرار هذه الفئة مضافا إليه مجموع تكرارات الفئات السابقة.
- **التكرارات التجميعية النازلة:** التكرار التجميعي النازل لأي فئة هو عبارة عن مجموع التكرارات ($\sum N_i$) مطروحا منه تكرارات الفئات السابقة.

مثال: نفس المثال السابق، المطلوب وضع التكرار التجميعي الصاعد والنازل

ج:1.3

الفئات	n_i	ت.ت.ص	ت.ت.ن
0−5	4	4	75
5−10	7	11	71
10−15	10	21	64
15−20	15	36	54
20−25	18	54	39
25−30	12	66	21
30−35	6	72	9
35−40	3	75	3
$\sum n_i$	75		

الملاحظة الأولى: القواعد الواجب إتباعها عند تشكيل الجدول الإحصائي هي كما يلي:

1- عنوان واضح في أعلى الجدول، يعطي فكرة عن البيانات التي يحتويها هذا الجدول.

2- ذكر مصدر البيانات في أسفل الجدول، حتى يتمكن القارئ من الرجوع إلى المصدر الأصلي للمعلومات مثلا: التقرير السنوي للديوان الوطني للإحصائيات، د.م.ج ،الجزائر 1996، صفحة 25.

3- ذكر وحدة القياس المستعملة.

4- ذكر عنوان كل عمود.

5- وضع رقما للجدول.

الملاحظة الثانية: نستعمل نفس الطريقة، في حالة الفئات غير المتساوية، عند حساب و تحديد التكرارات التجميعية الصاعدة و النازلة.

ج- العرض الجدولي في حالة خاصية كيفية:

يتكون جدول المعطيات من عمودين (سطرين) يحتوي العمود الأول على رموز كتابية للخاصية المدروسة، أما الثاني فيحتوي على تكرارات كل رمز كتابي.

مثال: أخذت عينة عشوائية من أساتذة جامعة الجزائر متكونة من 100 أستاذ، حيث أن الخاصية المدروسة هي رتبة الأستاذ، فكانت النتائج كالتالي:

ج:1.4

رتبة الأستاذ	أستاذ	أستاذ محاضر	مكلف بالدروس	أستاذ مساعد	معيد	$\sum$
ni	6	15	35	30	14	100

د- الجدول المزدوج: (Tableau de contingence)

يستعمل الجدول المزدوج عند دراسة خاصيتين في نفس الوقت في مجتمع ما، وتوضع المعلومات الإحصائية بالشكل التالي: نضع أفقيا الخاصية الأولى، ونضع عموديا الخاصية الثانية.

نرمز لقيم الخاصية الأولى بالرمز y_j حيث j تتراوح من 1 إلى m، وبالرمز x_i لقيم الخاصية الثانية، حيث i يأخذ القيم من 1 إلى n. مثال لذلك: لدراسة مستوى معيشة العائلات يمكن أن نتطرق إلى خاصيتين، مهنة رب العائلة والإنفاق الاستهلاكي، نلاحظ أن الخاصية الأولى كيفية أما الخاصية الثانية فإنها قابلة للقياس(كمية).

يمكن وضع الجدول المزدوج بأبعاد أربعة حسب الشكل التالي:

ج:1.5

	y_1	y_2	y_3	y_4	$n_{i.}$
x_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	n_{14}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.3}$	$n_{2.4}$	$n_{2.}$
x_3	n_{31}	n_{32}	$n_{3.3}$	$n_{3.4}$	$n_{3.}$
x_4	n_{41}	n_{42}	$n_{4.3}$	$n_{4.4}$	$n_{4.}$
$n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{..2}$	$n_{..3}$	$n_{..4}$	$\sum n_{i.} = \sum n_{.j}$

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع ما، تتكون من 183أسرة قصد دراسة خاصيتين هما مهنة رب الأسرة و التركبة الأسرية من حيث عدد الأطفال، فكانت النتائج كالتالي:

ج:1.6

	0	1	2	3	4	5	6	$n_{i.}$
إطار متوسط	10	8	6	4	3	1	0	32
مهنة حرة	15	7	3	2	1	0	0	28
عامل متخصص	3	5	8	10	15	9	7	57
عامل بسيط	2	4	9	11	13	17	10	66
$n_{.j}$	30	24	26	27	32	27	17	183

$n_{i.}$ = التكرارات الحدية ل x_i.

$n_{.j}$ = التكرارات الحدية ل y_i.

8- العرض البياني:(Représentation graphique) يبين العرض البياني تطور الظاهرة المدروسة في الزمان أو في المكان وبمجرد الملاحظة الأولى. سنتطرق إلى عرض البيانات الإحصائية للحالات الثلاثة التالية:

- متغير كمي منقطع.
- متغير كيفي.
- متغير كمي مستمر.

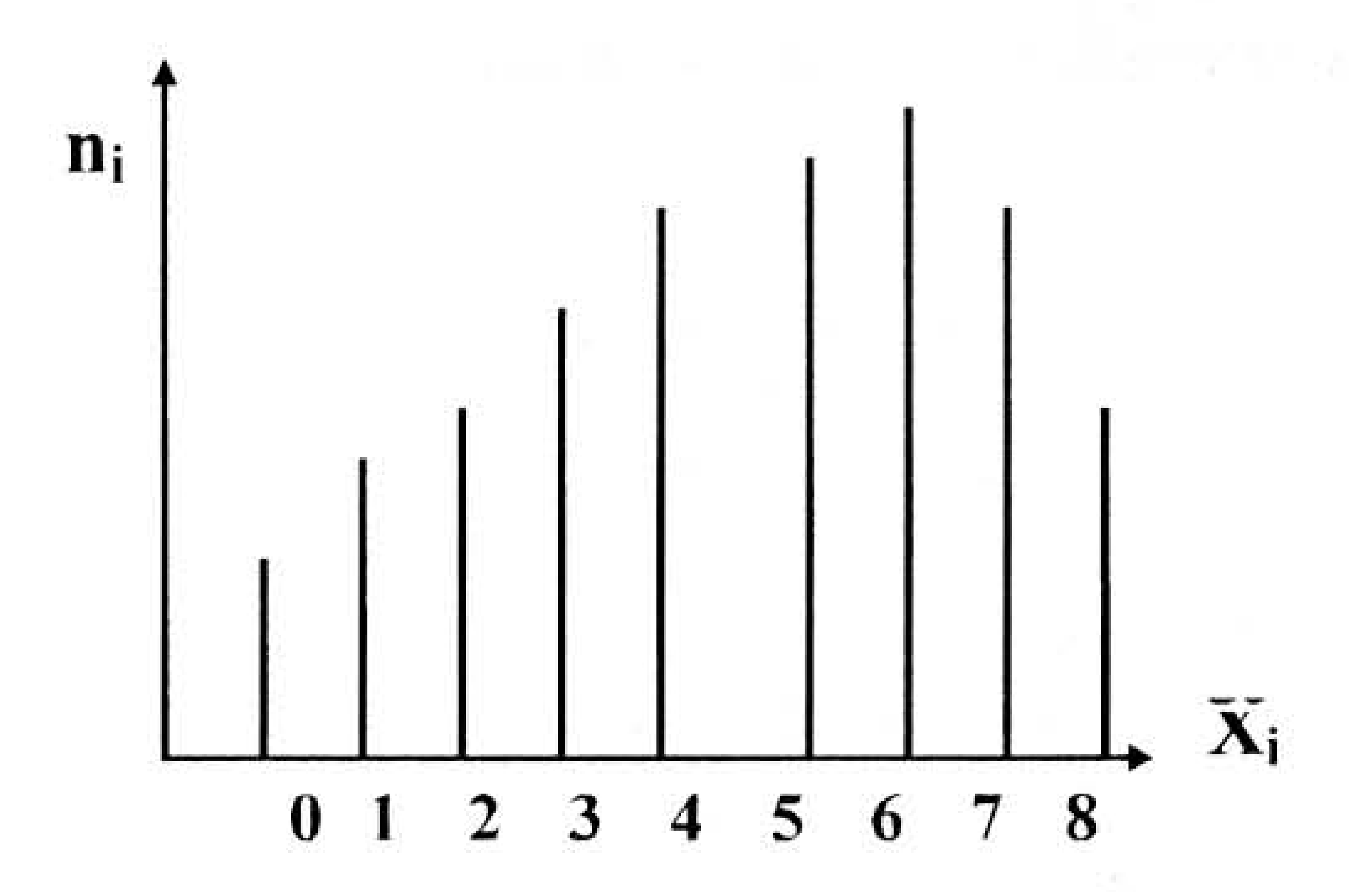
أ- العرض البياني في حالة متغير كمي منقطع: نكتفي في هذه الحالة بنوعين من العروض البيانية:

- **العرض البياني للتكرارات البسيطة:** هو عبارة عن أعمدة بسيطة تتناسب أطوالها مع التكرار المقابل لقيمة معينة للمتغير المدروس، وتسمى " الأعمدة البسيطة " (diagrammes en batons).

مثال: يبين الجدول التالي عدد الأطفال في العائلة ل:125 أسرة، المطلوب العرض البياني للتكرارات البسيطة.

ج:1.7

x_i	n_i	ت.ت.ص	ت.ت.ن
0	6	6	125
1	9	15	119
2	10	25	110
3	14	39	100
4	16	55	86
5	20	75	70
6	25	100	50
7	15	115	25
8	10	125	10
$\sum n_i$	125		



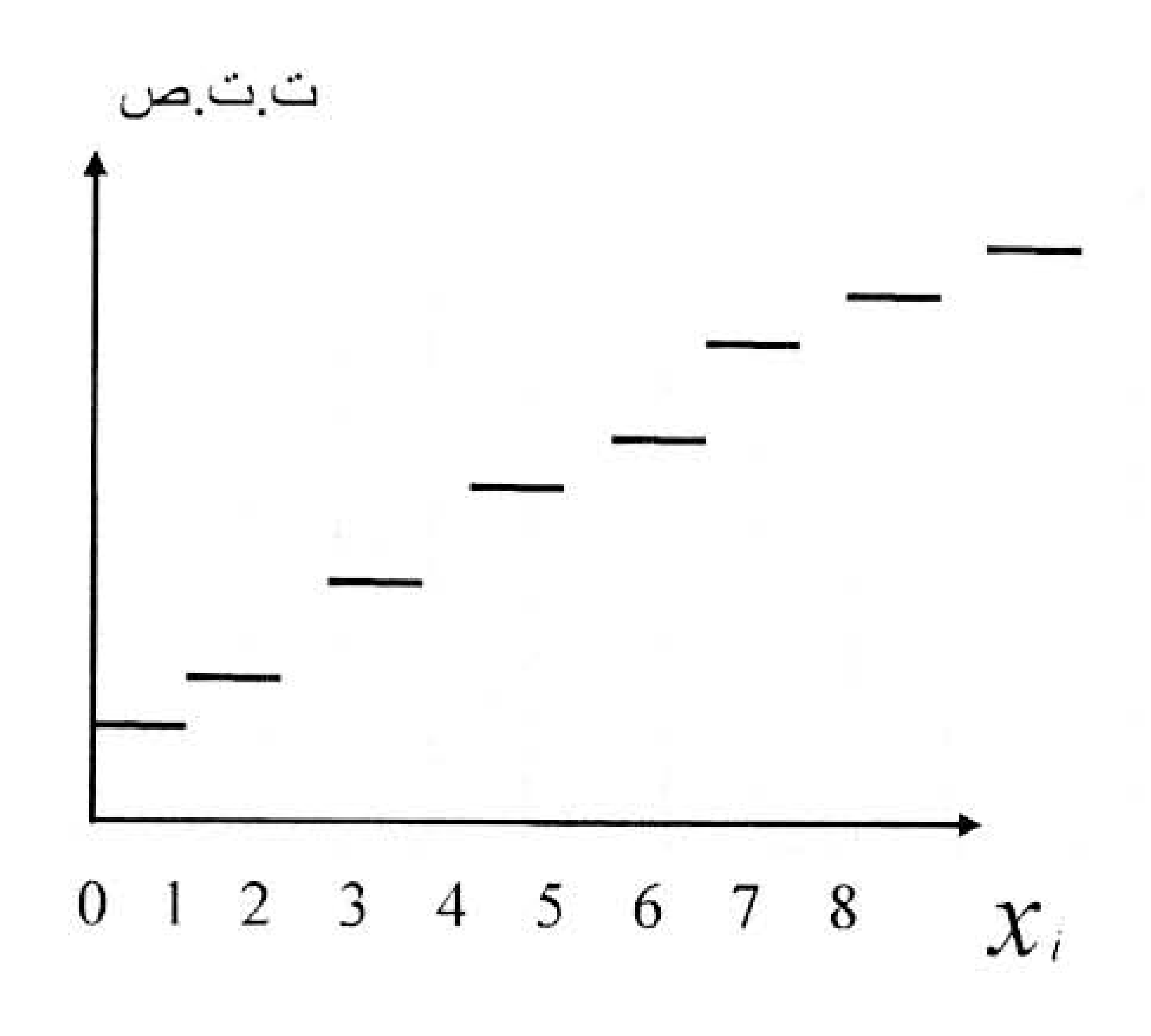
ش:1.1

ملاحظة: نلاحظ من بين الأعمدة التي تشكل العرض البياني السابق، أن العمود الذي يقابل القيمة 6 هو أطولهم وتكراره يساوي 25، معنى ذلك أن أغلبية العائلات لها 6 أطفال.

- **العرض البياني للتكرارات التجميعية الصاعدة والنازلة:**

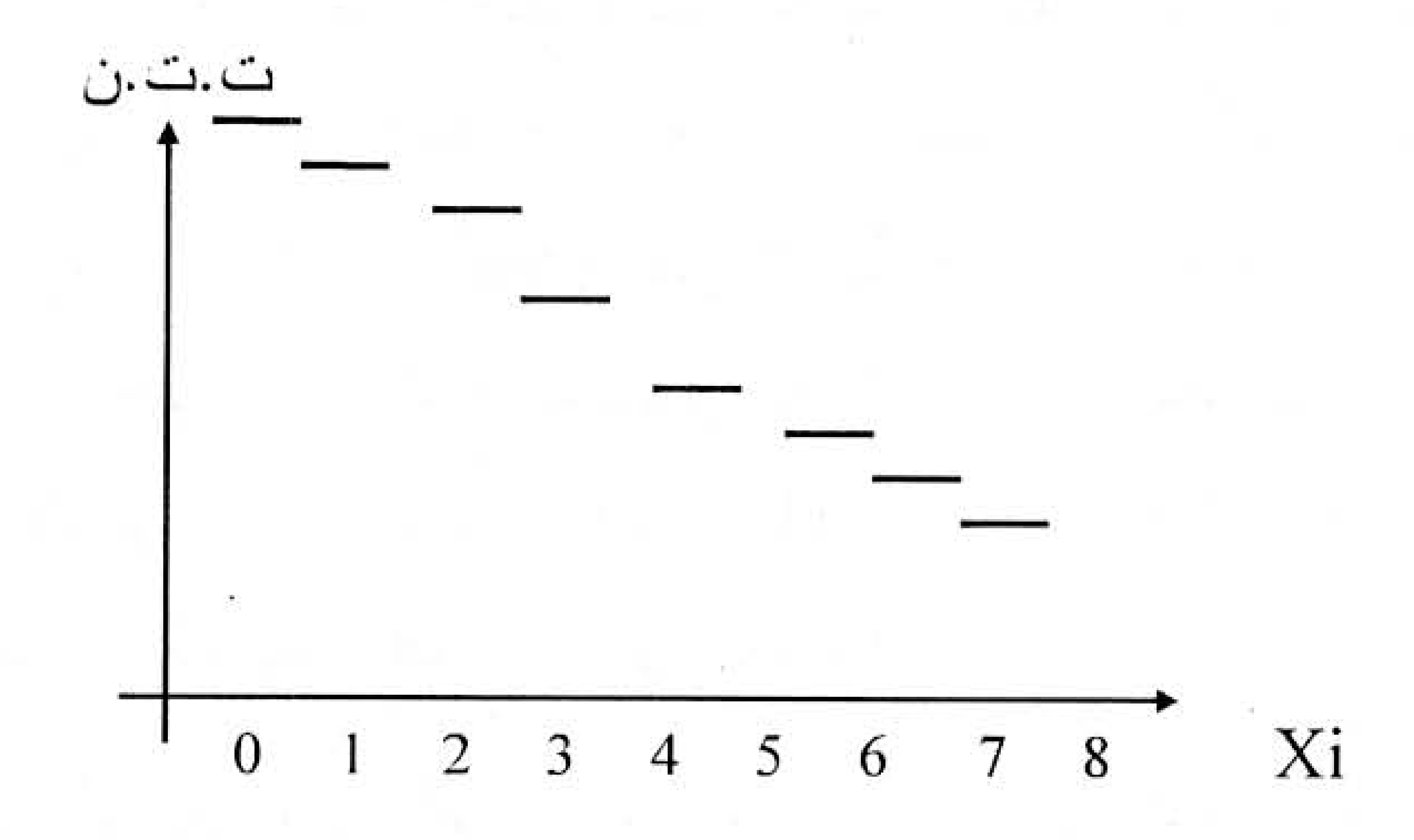
- **العرض البياني للتكرارات التجميعية الصاعدة:** Effectifs cumulés croissants هو عبارة عن قطع مستقيمة متصاعدة حسب تصاعد التكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير الإحصائي المدروس (عدد الأطفال في العائلة). مثلا لرسم القطعة المستقيمة المقابلة للقيمة 2 والذي يساوي تكرارها الصاعد 25، نضع قطعة مستقيمة طولها 1 سم مثلا عند إحداثيات النقطة (2، 25)، تبدأ من مستوى القيمة 2 لتنتهي عند مستوى القيمة1.

مثال: نفس المثال السابق مع إضافة عمودا إلى الجدول السابق (العمود الثالث) يحتوي على التكرارات التجميعية الصاعدة. حيث أن العرض البياني لهذه التكرارات هو كالتالي:



ش:1.2

- **العرض البياني للتكرارات التجميعية النازلة:** Effectifs cumulés décroissants هو عبارة عن قطع مستقيمة متنازلة حسب تنازل التكرارات التجميعية النازلة، حيث أن القطعة المستقيمة الأولى تقابل مجموع التكرارات وأصغر قيمة للمتغير المدروس والقطعة الثانية تقابل مجموع التكرارات ناقص التكرار البسيط الأول مع القيمة الثانية للمتغير الإحصائي وهكذا ...



ش:1.3

ب- **العرض البياني في حالة متغير كيفي:** سنتعرض إلى أهم العروض البيانية:

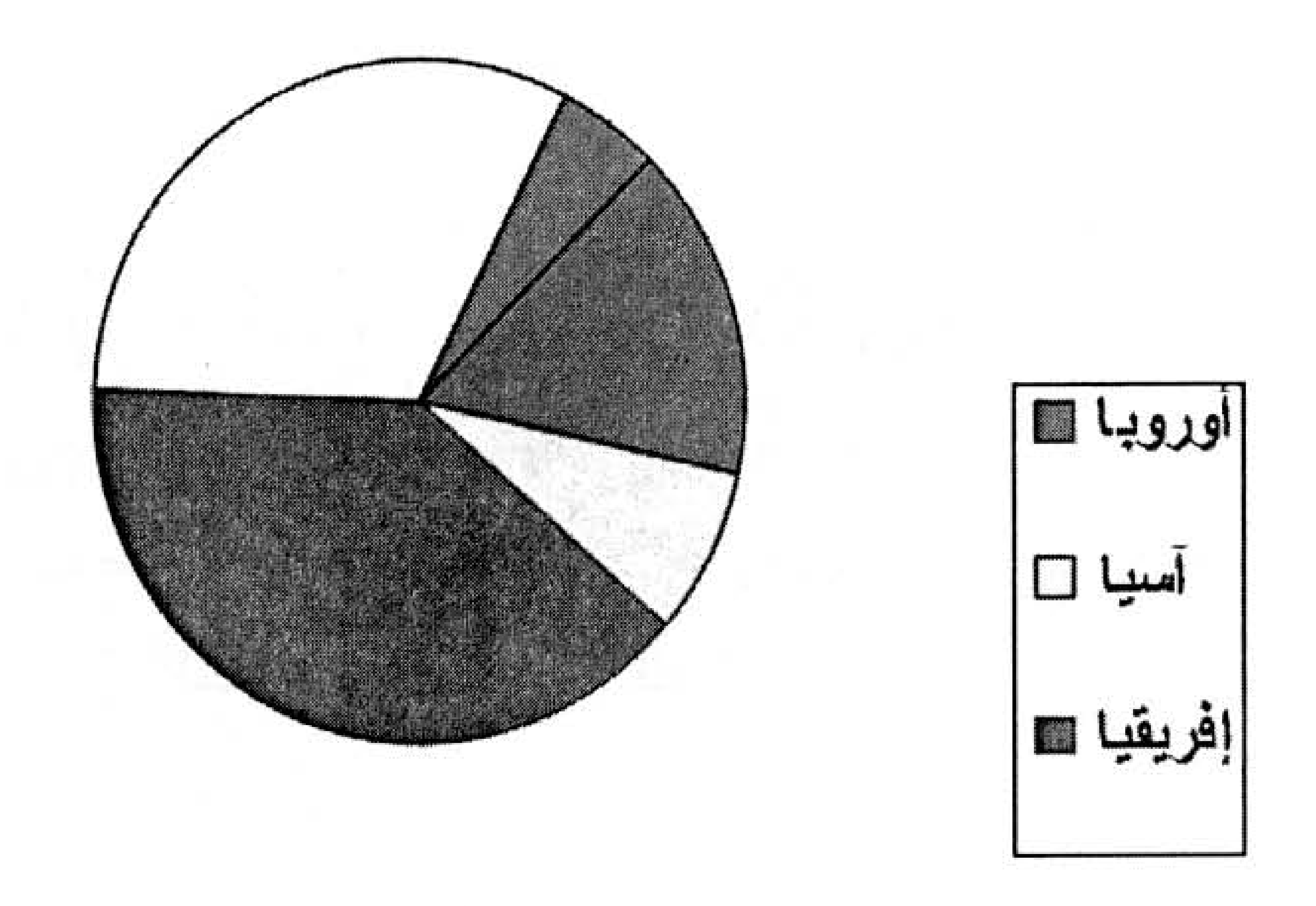
- **العرض الدائري:**(Diagramme Circulaire) يتمثل في دائرة مقسمة إلى عدة أجزاء كل جزء يقابل زاوية مركزية تتناسب مع التكرارات المقابلة لكل خاصية من الخصائص المدروسة، ولتحقيق ذلك نضيف عمودا إلى جدول المعطيات يحتوي على الزوايا المركزية المقابلة لكل تكرار.

مثال: يبين الجدول التالي الإنتاج العالمي للذهب حسب القارات في سنة ما:

ج:1.8

القارات	كمية الذهب (طن)	الزاوية المركزية
أوروبا	176	57.6
آسيا	87	28.47
إفريقيا	431	141.45
أمريكا	350	114.54
أوستراليا	56	18.32
المجموع	1100	

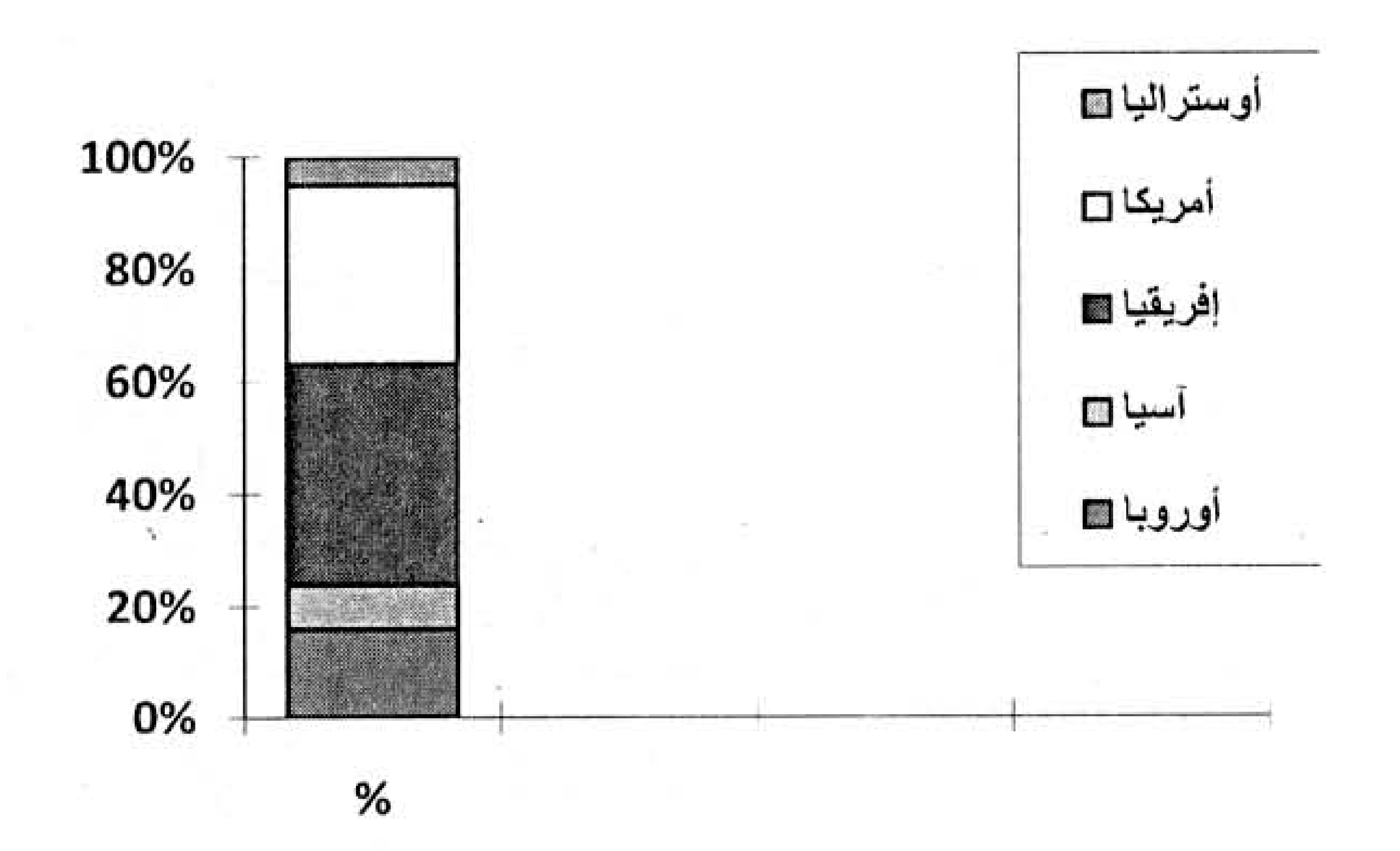
ملاحظة: يمكن استعمال النسب المئوية لوضع العرض الدائري.



ش:1.4

- **العمود المجزأ:** (Diagrammes en Barres) وهو عبارة عن مستطيل مقسم إلى عدة أجزاء، كل جزء يقابل تكرار معين للخاصية المدروسة.

مثال: نفس المثال السابق (الإنتاج العالمي للذهب)، لوضع العمود المجزأ، نستعمل النسب المئوية المقابلة لكل تكرار، حيث أن طول المستطيل يساوي 100 %.

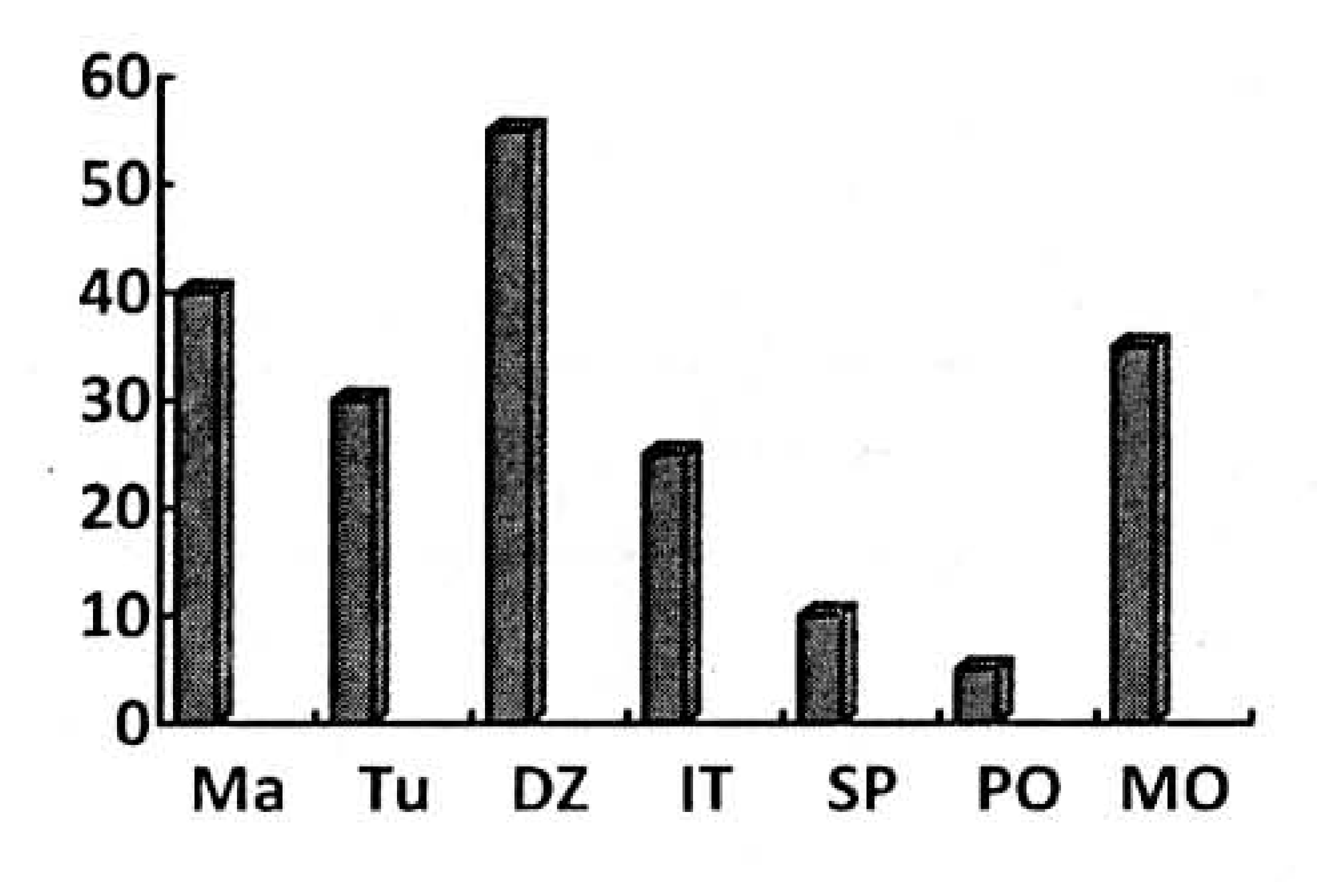


ش:1.5

- **الأعمدة المستطيلة:** (Diagrammes en Colonnes) هي عبارة عن مستطيلات متباعدة بمسافات ثابتة، ولها قواعد متساوية، وتتناسب أطوالها مع التكرارات المقابلة لمكونات الخاصية المدروسة.

مثال: يبين الجدول التكراري التالي مكونات عينة عشوائية من المغتربين في فرنسا: ج:1.9

الجنسية	n_i
المغرب	40
تونس	30
الجزائر	55
إيطاليا	25
إسبانيا	10
البرتغال	5
الشرق الأوسط	35
$\sum n_i$	200



ش:1.6

ج- العرض البياني في حالة متغير كمي مستمر: إن العروض البيانية للمتغير الإحصائي المستمر هي أكثر العروض البيانية استعمالا، ومن أهمها ما يلي:

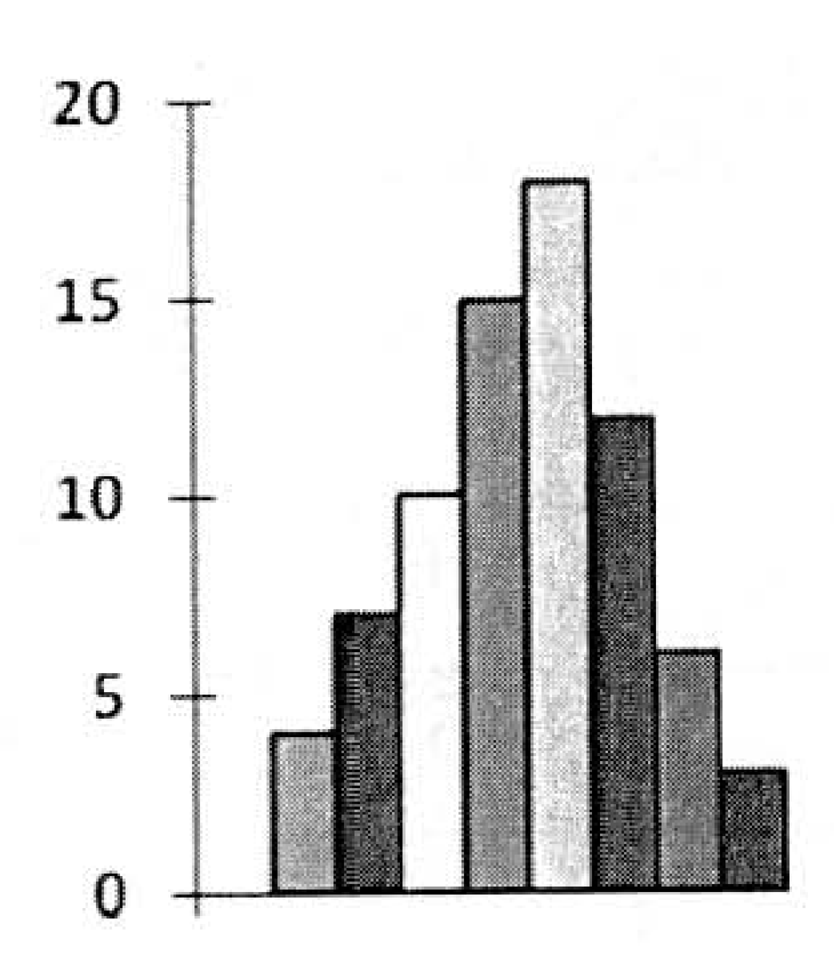
- **المدرج التكراري:**(Histogramme) يكون على شكل مستطيلات متلاصقة، طول كل مستطيل منها يتناسب مع التكرار المقابل، وقاعدة كل منها تساوي طول الفئة المقابلة، حيث توضع الفئات على محور السينات وتوضع التكرارات على محور العينات، ويمكن أن نميز بين حالتين عند وضع المدرج التكراري:

الحالة الأولى: عندما تكون الفئات متساوية، نلاحظ في هذه الحالة أن قاعدة المقارنة ثابتة ومتساوية ومن ثمة لا نجري أي تعديل على جدول المعطيات.

مثال: يبين الجدول التالي توزيع ظاهرة التأخر عن العمل على 75 عامل في إحدى المؤسسات:

ج:1.10

الفئات	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	$\sum n_i$
n_i	4	7	10	15	18	12	6	3	75



ش:1.7

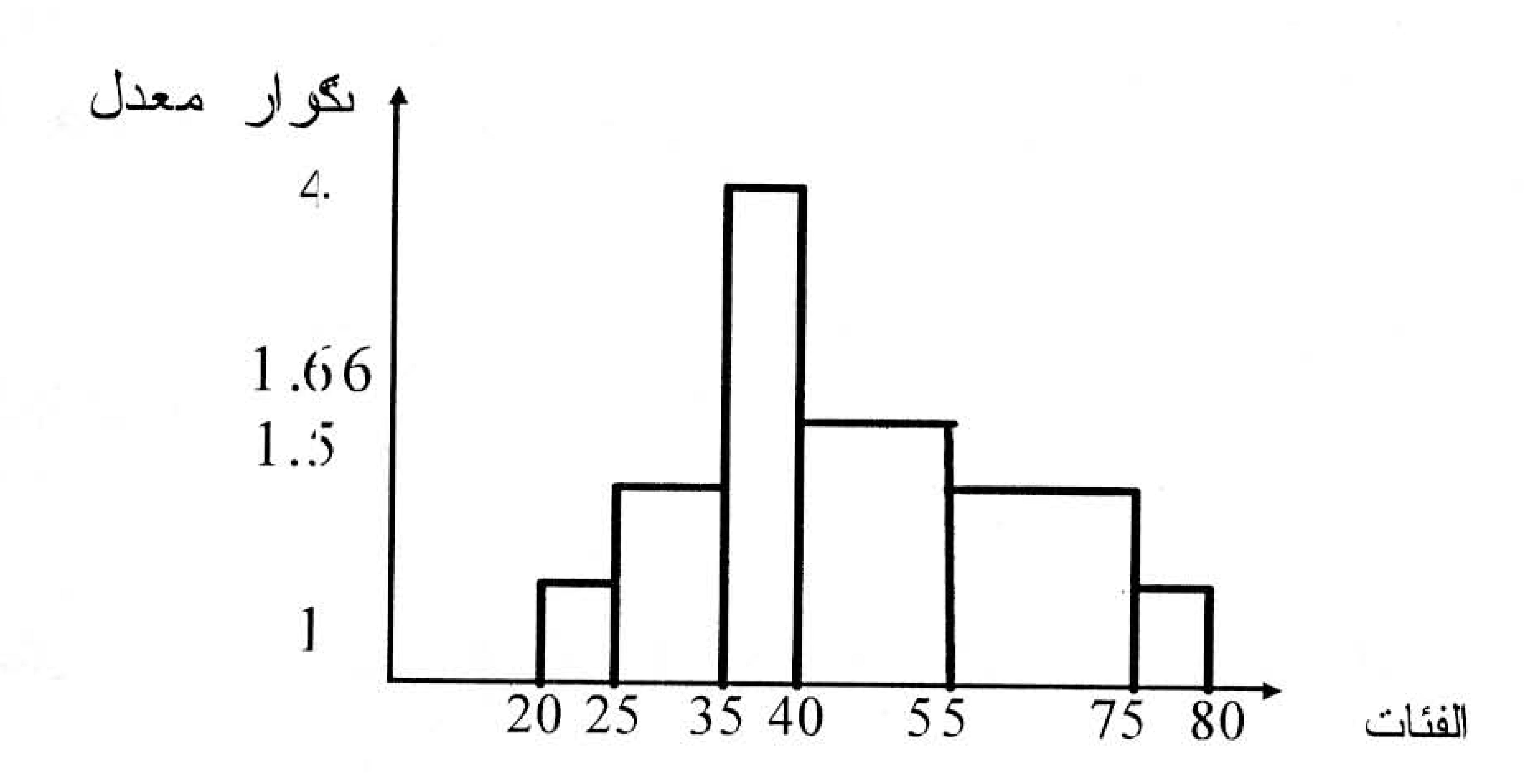
الحالةالثانية: حالة الفئات غير المتساوية: إذا كانت الفئات غير متساوية، نقوم بتعديل التكرارات، لأن قاعدة المقارنة غير ثابتة، حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرار المقابل لها، أي إيجاد عدد الوحدات الإحصائية الموزعة على وحدة قياس معينة.

التكرار المعدل: هو عبارة عن النسبة بين التكرار البسيط وطول الفئة المقابلة.

مثال: يبين التوزيع التكراري التالي توزيع 100 عامل حسب الأجر اليومي:

ج:1.11

فئات الأجور	التكرار البسيط	طول الفئة	التكرار المعدل
20–25	5	5	1
25–35	15	10	1.5
35–40	20	5	4
40–55	25	15	1.66
55–75	30	20	1.5
75–80	5	5	1
مجموع التكرارات	100		



ش: 1.8

ملاحظة: نقوم بتعديل التكرارات (في حالة فئات غير متساوية) في حالتين:

أ- عند رسم المدرج التكراري.

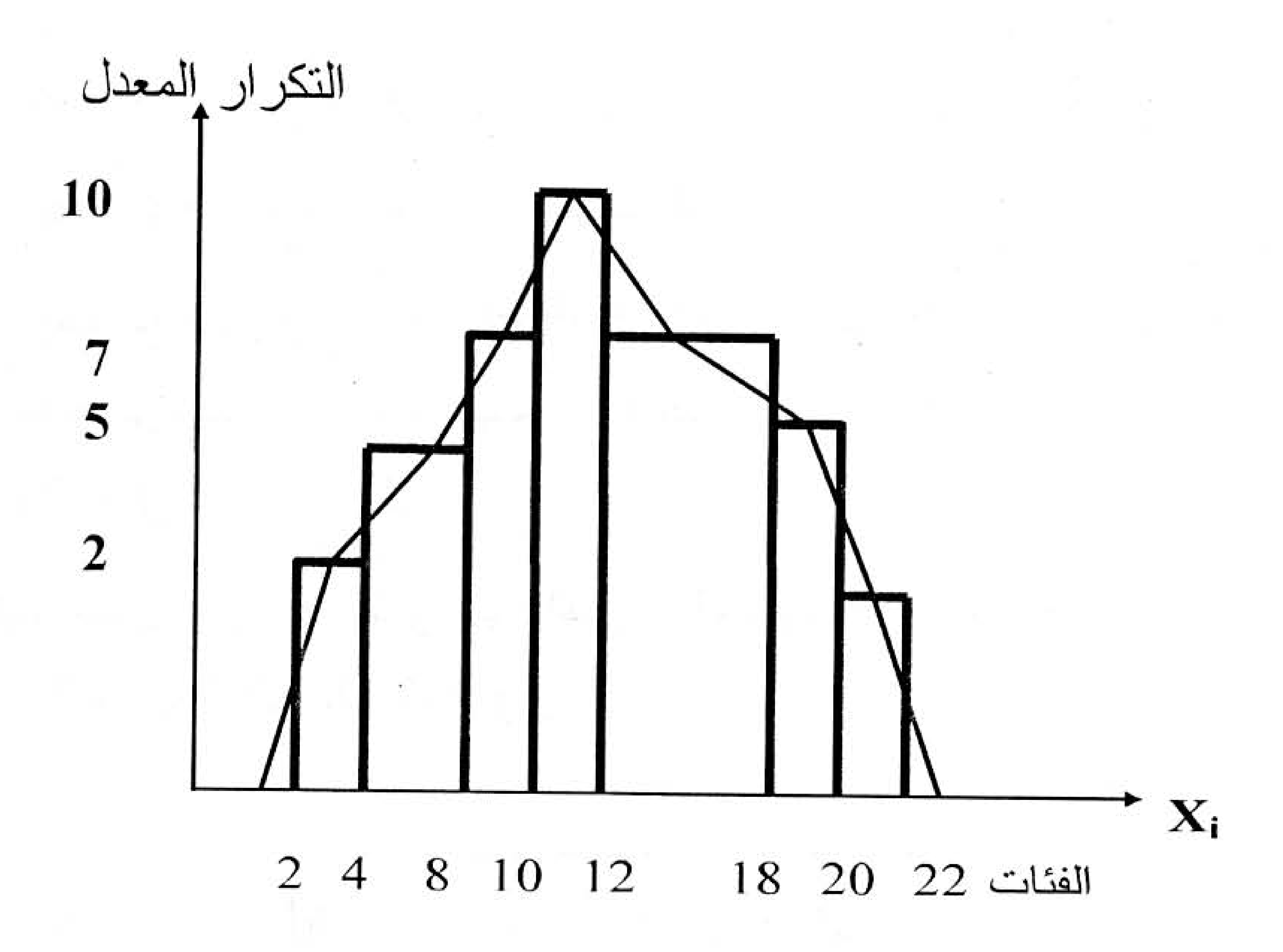
ب- عند تحديد الفئة المنوالية و حساب المنوال.

2- **المضلع التكراري:** ((Polygone de Fréquence هو مجموعة من قطع مستقيمة متصلة و منكسرة، تتحدد بنقاط إحداثياتها: مراكز الفئات والتكرارات المقابلة لها.

مثال: ليكن التوزيع التكراري التالي، المطلوب وضع العرض البياني المناسب والمضلع التكراري.

ج:1.12

الفئات	n_i	k_i	التكرار المعدل
2-4	3	2	3
4-8	10	4	5
8-10	7	2	7
10-12	10	2	10
12-18	21	6	7
18-20	6	2	6
20-22	2	2	2
المجموع	59		



ش: 1.9

ملاحظة: الخط المنكسر يمثل المضلع التكراري، حيث أن المساحة التي تقع تحت المضلع التكراري تساوي المساحة التي تقع تحت المدرج التكراري، وحتى نحافظ على المساحة التي تقع تحت هذا المضلع، نفرض أن لهذا التوزيع فئتان إحداهما في بدايته والأخرى في نهايته، تكرار كل منها يساوي الصفر، بحيث ننطلق من مركز الفئة الافتراضية الأولى وننتهي عند مركز الفئة الافتراضية الأخيرة.

د- العرض البياني للتكرار التجميعي في حالة متغير مستمر:

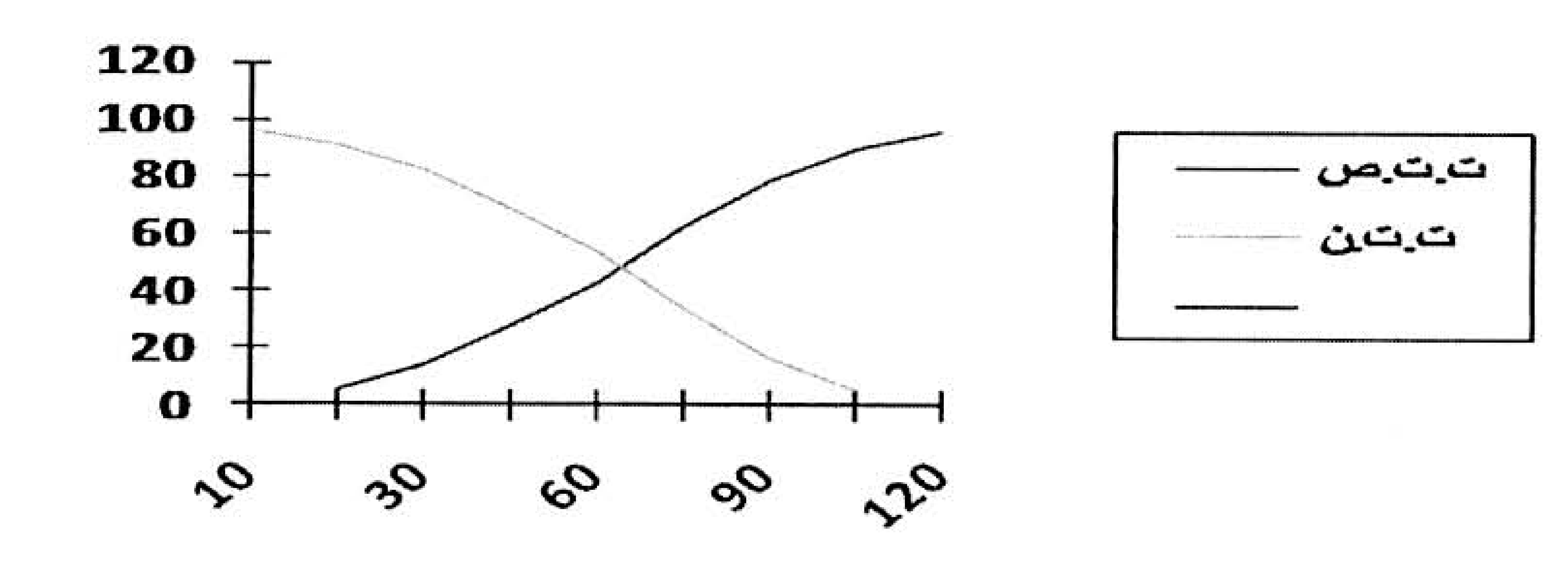
- **العرض البياني للتكرار التجميعي الصاعد:** يسمى بالمنحنى التجميعي الصاعد، يرسم هذا المنحنى عن طريق إيصال مجموعة النقاط ذات الإحداثيات التالية: الحدود العليا للفئات والتكرارات التجميعية الصاعدة المقابلة لها.

- **العرض البياني للتكرار التجميعي النازل:** وهو عبارة عن المنحنى التجميعي النازل، يتم رسمه بإيصال مجموعة النقاط ذات الإحداثيات التالية: الحدود الدنيا للفئات والتكرارات التجميعية النازلة المقابلة لها.

مثال : ليكن التوزيع التكراري التالي:

ج: 1.13

الفئات	n_i	≤ ت.ت.ص	ت.ت ن
10-20	5	5	96
20-30	9	14	91
30-40	13	27	82
40-60	15	42	69
60-80	20	62	54
80-90	17	79	34
90-100	11	90	17
100-120	6	96	6
المجموع	96		



ش.10.1

ملاحظة:

يبين كل من المنحنى التجميعي الصاعد والنازل شدة أو ضعف تطور الظاهرة المدروسة عند مستوى معين من مجال الدراسة. إن فاصلة نقطة تقاطع المنحنى التجميعي الصاعد مع النازل يسمى"الوسيط " LA Mediane، أما ترتيبها فهو ($\frac{\sum n_i}{2}$).

تمارين محلولة للفصل الأول

التمرين الأول: أجريت دراسة حول استطلاع للرأي على 200 مستهلك لمعرفة رأيهم حول منتج جديد عرض في السوق، الإجابة المطلوبة من المستهلك هي"موافق أو غير موافق". المطلوب ما يلي:

1- يتكون المجتمع من:
أ- كل المستهلكين.
ب- من المستهلكين الجزائريين.
ج- من المستهلكين المستوجبين.
د- من المجتمع الذي سحبت منه العينة.

2- المتغير المدروس هو:
أ- كمي مستمر.
ب- كمي منقطع.
ج- كيفي.
د- كيفي وكمي.

الإجابة:

1- نلاحظ أن المجتمع المدروس يتكون من المستهلكين المستجوبين.

2- كما نلاحظ أن المتغير المدروس هو متغير كيفي، لأنه غير قابل للقياس كميا ويتمثل في عبارتين موافق أو غير موافق.

التمرين الثاني: سجل حضور 80 مريضا يوم 1995/10/16 لمصلحة أمراض المفاصل للمستشفى الجامعي للدويرة، نرمز ل x_i ضغط الدم (المتغير المدروس). المطلوب ما يلي:

1- يتكون المجتمع المدروس من:

أ- كل المرضى.

ب- المرضى المصابين بمرض المفاصل.

ج- كل المرضى المسجلين بهذه المصلحة.

د- 80 مريض الذين حضروا يوم 1995/10/16.

2- المتغير x_i المدروس هو متغير:

أ- كمي مستمر.

ب- كمي منقطع .

ج- كيفي.

الإجابة:

1- يتكون المجتمع المدروس أو بالأحرى العينة المدروسة من 80 مريض.

2- نلاحظ أن المتغير المدروس هو ضغط الدم و هو قابل للقياس بوحدة قياس كل قيمها ممكنة في مجال الدراسة إذن فالمتغير كمي مستمر.

التمرين الثالث: يتكون مجتمع من 4 فئات اجتماعية-مهنية، حجمه N =5000 وحجم كل فئة هو كالتالي: N_1 =1000، N_2 =1800، N_3 =1600، N_4 =600. نريد سحب عينة حجمها n =180: المطلوب ما يلي:

1- ماهي طبيعة المجتمع المدروس؟.

2- حدد عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة؟.

3- بإستعمال جدول الأعداد العشوائية، حدد رقم الوحدات الإحصائية المسحوبة من كل فئة ؟.

الإجابة:

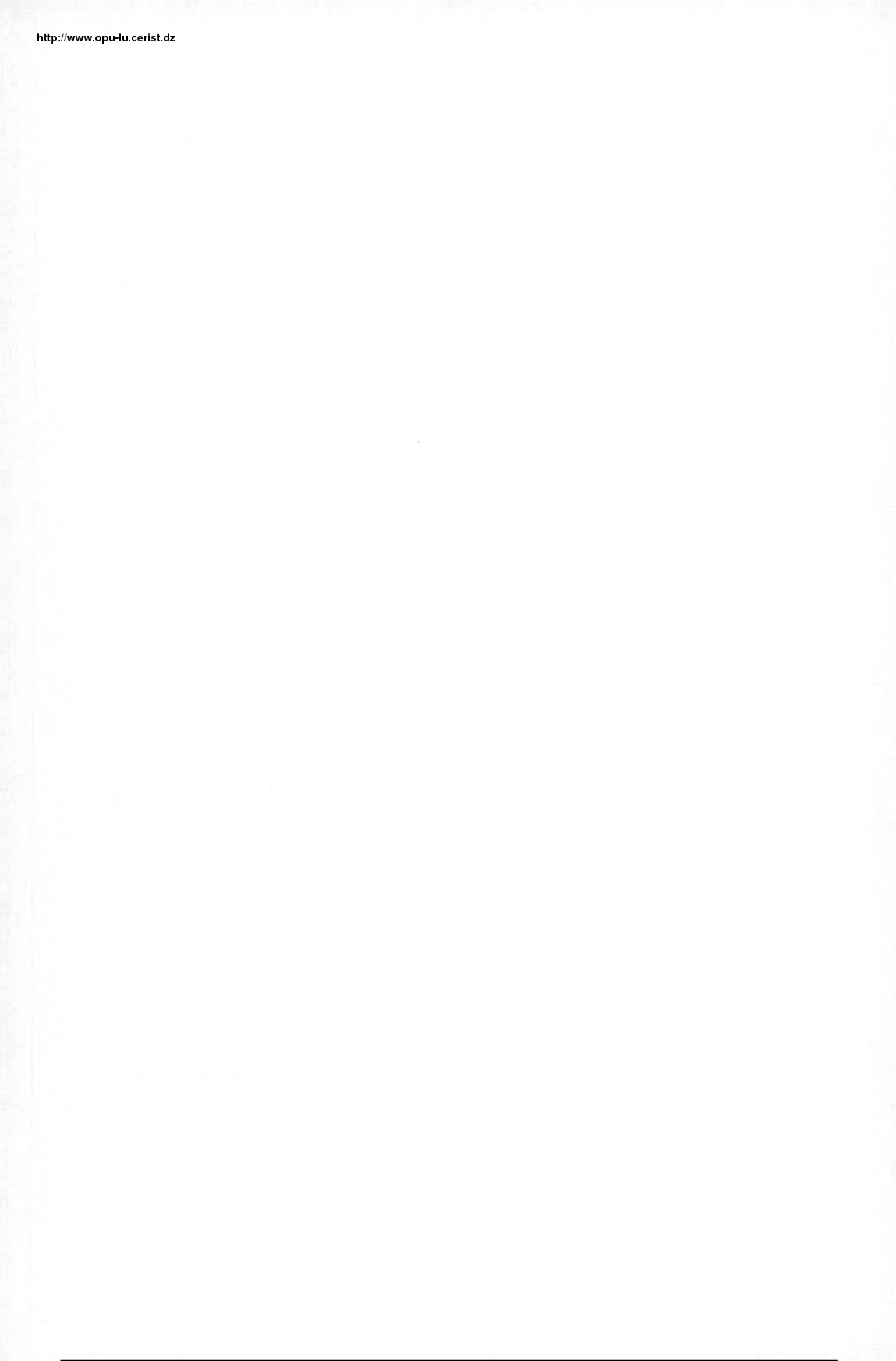
1- المجتمع المدروس غير متجانس، لأنه يتكون من فئات اجتماعية متباينة.

2- عدد الوحدات الإحصائية التي يمكن سحبها من كل فئة هو كما يلي:

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \cdot n = \frac{1000}{5000} \times 180 = 36, n_2 = \frac{N_2}{N} \cdot n = \frac{1800}{5000} \times 180 = 65$$

$$n_3 = \frac{N_3}{N} \cdot n = \frac{1600}{5000} \times 180 = 58, n_4 = \frac{N_4}{N} \cdot n = \frac{600}{5000} \times 180 = 22$$

3-عند استعمال جدول الأعداد العشوائية، كل شخص يتحصل على أرقام تختلف عن الأرقام التي تحصل عليها شخص أخر إلا إذا استعملا نفس الاختيار في اتجاه الأرقام.



الفصل الثاني

خصائص النزعة المركزية

Caractéristiques de la tendance centrale

رأينا في الفصل السابق كيف يتم عرض البيانات الإحصائية جدوليا وبيانيا من أجل نقل وصف عام وسريع للظاهرة المدروسة ومن أجل وضع ترتيب معين وضروري لهذه المعلومات الإحصائية. غير أن لهذه الطريقة حدود من بينها:

1- لا يمكن استخدامها في الأسلوب الشفهي.

2- لا يمكن استخدامها لتحليل المعطيات.

3- لا يمكن الاستفادة منها في مجال الاستقراء الإحصائي(التنبؤ واتخاذ القرارات).

ولهذه الأسباب وضعت مقاييس عددية وصفية يمكن استخدامها في مجالات عديدة منها التحليل والتنبؤ واتخاذ القرار. ومن بين هذه المقاييس، مقاييس النزعة المركزية أو مقاييس الوضع.

مقاييس النزعة المركزية

نتطرق في هذا الفصل إلى أهم مقاييس النزعة المركزية الأكثر استعمالا من بينها المتوسطات(الوسط الحسابي، الوسط التوافقي، الوسط الهندسي، الوسط ألتربيعي)، الوسيط، والمنوال.

1- **مفهوم النزعة المركزية:** تميل البيانات الإحصائية إلى التمركز حول قيمة معينة، وكلما ابتعدنا عن هذه القيمة فإن عدد المعلومات يبدأ في التناقص، نسمي هذه الظاهرة بالنزعة المركزية.

2- **قياس النزعة المركزية:** يعبر قياس النزعة المركزية عن مركز التوزيع الإحصائي، ولقياس هذه النزعة نستعمل عدة مقاييس من بينها:

أ- **الوسط الحسابي:** (**Moyenne arithmétique**) وهو عبارة عن مجموع القياسات الخاصة بظاهرة معينة على عدد هذه القياسات.

ويمكن أن نفرق بين حالتين:

- **الوسط الحسابي البسيط:** (**Moyenne arithmétique simple**)

يستعمل الوسط الحسابي البسيط في حالة بيانات غير مبوبة، أي عندما يكون لقياسات المتغير المدروس نفس المستوى من الأهمية، مثلا عندما يكون لديك 4 مواد لها نفس المعامل (نفس الأهمية) فإننا نستعمل الوسط الحسابي البسيط لحساب المعدل.

نفرض أن القياسات هي: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$، حسب التعريف السابق فإن علاقة الوسط الحسابي هي: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

مثال: تبين السلسلة الإحصائية التالية أجور 8عمال في مؤسسة ما، المطلوب حساب الوسط الحسابي.

700 ; 1800 ; 1300 ; 1500 ; 900 ; 800 ; 1100 ; 1000

$$\bar{X} = \frac{700+1800+1300+1500+900+800+1100+1000}{8} = 1137.5$$

- **العلاقة الثانية للوسط الحسابي:** تستعمل في هذه الحالة وسط فرضي(Moyenne provisoire) لتحديد علاقة الوسط الحسابي حيث أن هذا الأخير، هو عبارة عن الوسط الفرضي مضافا إليه الوسط الحسابي لانحرافات قيم المتغير الإحصائي عن الوسط الفرضي. علما أن هذه الانحرافات هي $(x_i - x_0)$ و x_0 هو الوسط الفرضي، إذن تعطى علاقة الوسط الحسابي باستعمال وسط فرضي بالشكل التالي:

$$\bar{X} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)}{n}.$$

مثال: نفس المثال السابق، ونفرض أن $X_0 = 1000$ ، إذن الوسط الحسابي هو:

$$\bar{X} = 1000 + \frac{(700-1000)+(1800-1000)+......+(1000-1000)}{8} = 1137.5$$

- **الوسط الحسابي المرجح:(Moyenne Arithmétique Pondérée)**

تختلف أهمية قياسات المتغير الإحصائي من قيمة إلى أخرى في أغلب الأحيان، ولهذا الغرض أدخل الترجيح في علاقة الوسط الحسابي، والترجيح هو أهمية أو وزن قياس معين من قياسات المتغير الإحصائي. مثلا أمتحن طالب في 3 مواد: الإحصاء، الرياضيات، الاقتصاد الجزئي فكانت العلامات على التوالي 10، 12، 8 ومعاملاتها (أهميتها أو وزنها) هي على التوالي 3، 4،3.

المطلوب تحديد الوسط الحسابي أو المعدل المتحصل عليه:

$$\bar{x} = \frac{12\times3+10\times3+8\times4}{3+3+4} = 9.8$$

ويمكن استعمال الوسط الفرضي لحساب الوسط الحسابي، نفرض أن $X_0=10$:

$$\bar{x} = 10 + \frac{(8-10)\times4+(10-10)\times3+(12-10)\times4}{10} = 9.8$$

- الوسط الحسابي في حالة توزيع تكراري (distribution de fréquence)

نستعمل نفس علاقة الوسط الحسابي المرجح في حالة توزيع تكراري، غير أن الذي ينقصنا هي القيم النقطية للمتغير الإحصائي (Xi)، لأن هذه القيم معطاة في حالة توزيع تكراري على شكل مجالات جزئية أو فئات، ولحل هذا الإشكال نستبدل هذه الفئات بمراكزها، ليصبح (Xi) هو عبارة عن مركز الفئة.

مثال: ليكن الجدول التكراري التالي،

ج:2.1

الفئات	n_i	x_i	$n_i \times x_i$	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$	$\frac{n_i(x_i - x_0)}{K}$
0−2	3	1	3	−6	−18	−9
2−4	6	3	18	−4	−24	−12
4−6	9	5	45	−2	−18	−9
6−8	10	7	70	0	0	0
8−10	8	9	72	2	16	8
10−12	7	11	77	4	28	14
12−14	2	13	26	6	12	6
المجموع	45		311		−4	−2

المطلوب حساب الوسط الحسابي باستعمال علاقة التعريف وعلاقة الوسط الفرضي؟

الإجابة:

1- نطبق علاقة التعريف : $\bar{x} = \frac{311}{45} = 6.91$

2- نطبق علاقة الوسط الحسابي باستعمال وسط فرضي: نفرض أن $x_0 = 7$، لماذا اخترنا القيمة 7 للوسط الفرضي؟ لأنها تـقع في منتصف قيم Xi، وهذا لا يمنعنا من اختيار أية قيمة أخرى من قيم x_i.

إن اختيار القيمة الوسطى للوسط الفرضي يسهل العمليات الحسابية.

$$\bar{x} = 7 + \frac{(-4)}{45} = 6.91$$

3- يمكن تطبيق علاقة ثالثة تسمى العلاقة المختصرة للوسط الحسابي:

نقسم الانحرافات أو الفروق $(x_i - x_0)$ على طول الفئة K (في حالة طول الفئة ثابت) أو على قاسم مشترك (في حالة طول الفئة غير ثابت).

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\sum ni(\frac{x_i - x_0}{K}).K}{\sum ni} \Rightarrow \overline{x} = 7 + \frac{(-2).2}{45} = 6.91$$

- **خصائص الوسط الحسابي:** Propriétés de la moyenne arithmétique

للوسط الحسابي عدة خصائص من بينها:

1- يتأثر الوسط الحسابي بالقيم المتطرفة أو الشاذة (القيم التي تقع في طرفي مجال الدراسة):

مثال: تتكون أسرة من 5 أفراد، تبلغ أعمارهم كما يلي: 10,11,13,49,55.

المطلوب: هل يمكن استعمال الوسط الحسابي كمقياس من مقاييس النزعة المركزية؟.

الحل: قبل أن نجيب على هذا السؤال، نقوم بحساب قيمة الوسط الحسابي، ثم نقارنها بقيم المتغير الإحصائي:

الوسط الحسابي: $\overline{x} = \frac{10+11+13+49+55}{5} = 27.6$، نلاحظ أن النتيجة المتحصل عليها لا تمثل أية قيمة من القيم المدروسة، وبالتالي نستنتج أنه لا يمكن استعمال الوسط الحسابي في مثل هذه الحالات، لأنه من

المفروض أن تكون قيم المتغير الإحصائي متمركزة حول النتيجة المتحصل عليها.

2- يستعمل الوسط الحسابي في حالة المتغيرات الكمية أي القابلة للقياس عدديا.

3- لا يمكن أن يكون لأي توزيع تكراري أكثر من وسط حسابي، إذن يوجد وسط حسابي وحيد بالنسبة لتوزيع تكراري معين أو بالنسبة لسلسلة إحصائية معينة.

4- أساس حساب الوسط الحسابي هو الحساب التجميعي.

5- لا يكون الوسط الحسابي قيمة مشاهدة إلا نادرا، أي لا تكون قيمته من بين قيم المتغير الإحصائي المستعملة في حسابه إلا نادرا.

6- نستنتج من علاقة الوسط الحسابي أن: $\sum x_i = n \times \overline{x}$

7- إن مجموع انحرافات قيم المتغير الإحصائي بالنسبة للوسط الحسابي تساوي الصفر ونرمز لهذه الانحرافات بالرمز e_i، حيث $\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$ وللتأكد من ذلك نقوم بنشر القوس: $\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum \overline{x} = n \times \overline{x} - n \times \overline{x} = 0$ و يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل التالي: $\overline{e} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})}{n}$، تسمى هذه الانحرافات بالقيم المعيارية، إذن متوسط القيم المعيارية يساوي إلى الصفر.

8- يكون مجموع مربعات الانحرافات (مجموع مربعات القيم المعيارية) بالنسبة للوسط الحسابي أصغر ما يمكن مقارنة ببقية القيم الأخرى:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \min$$

9 – متوسط قيمة ثابتة يساوي تلك القيمة الثابتة.

10- ليكن x_i متغيرا عشوائيا بمتوسط $\overline{x}$، و لتكن المعادلة $y_i = a + b \cdot x_i$ حيث أن a ,b ثوابت، فما هو متوسط y_i؟ (علما أن مجموع قيمة ثابتة يساوي تلك القيمة مضرب في n، أي أن $\sum a = n.a$).

إذن: $\overline{y} = \dfrac{\Sigma(a + b \cdot x_i)}{\Sigma n_i} = \dfrac{b\,\Sigma x_i \cdot n_i}{\Sigma n_i} + \dfrac{a\,\Sigma n_i}{\Sigma n_i} = a + b.\overline{x}$.

– **تحديد الوسط الحسابي لظاهرة مستمرة:** نفرض أن مستوى مخزون مادة ما في مؤسسة معينة يتغير وفق دالة من الشكل $M(t)$:

حيث أن M(t) هو مستوى المخزون في الزمن (t)، لحساب متوسط المخزون في الفترة (0 T;) نقسم مجال الدراسة إلى مجالات جزئية dt، وتكتب صيغة هذا المتوسط بالشكل التالي: $\overline{M}(t) = \dfrac{1}{T}\int M(t)dt$.

مثال: كان مخزون مؤسسة ما، من مادة أولية معينة في بداية شهر أكتوبر2009، يساوي 1500 وحدة، حيث أن استعمال المخزون برمج بالشكل التالي:15 وحدة في اليوم الأول، ثم يزداد بوحدة واحدة في كل يوم حتى نهاية الشهر. المطلوب تحديد المخزون المتوسط في هذه المؤسسة في فترة ما من شهر أكتوبر؟.

الحل: يرمز لـــ x_i للكمية المجمعة لاستعمالات المخزون في أيام شهر أكتوبر:

$$x_i = 15+16+17+18+.....+(15+(n-1))$$

نلاحظ أن x_i هو عبارة عن مجموع n حد لمتوالية حسابية، نرمز للحد الأول والحد الأخير بالرمز u_1, u_n على التوالي، حيث أن المقدار: $\frac{(u_1+u_n)^n}{2}$ هو عبارة عن مجموع حدود المتوالية الحسابية، وبالتعويض نحصل على ما يلي،

$$(15+15+x-1)\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}+14.5\times x$$

إن المخزون في الزمن t هو: $x(t)=1500-x^2-14.5\times x$

المطلوب: ما هو متوسط المخزون في شهر أكتوبر ؟

$$\overline{x}(t)=\frac{1}{30}\int(1500-\frac{x^2}{2}-14.5\times x)d(t)$$

$$\overline{x}(t)=\frac{1}{30}(1500\times x)-\frac{x^3}{6}-7.25\times x^2\Big|_1^{30}\Rightarrow\overline{x}(t)=\frac{33975}{30}=1132,5$$

ب- الوسط الهندسي:(Moyenne géométrique))

الوسط الهندسي لـــ n قيمة من قيم المتغير الإحصائي هو عبارة عن الجذر النوني لجداء هذه القيم.

لتكن: $x_1;x_2;x_3;\dots\dots\dots;x_n$ القيم الممكنة للمتغير الإحصائي، حيث أن صيغة الوسط الهندسي البسيط تعطى بالشكل التالي:

$$G=\sqrt[n]{x_1;x_2;x_3;\dots\dots\dots;x_n}$$

مثال: لتكن السلسلة الإحصائية التالية: 9; 7; 16; 14; 10، المطلوب حساب الوسط الهندسي،

$$G=\sqrt[5]{10.14.16.7.9}=10.71\ .$$

لتسهيل العمليات الحسابية، نقوم بإدخال اللوغاريتم على الصيغة السابقة، لتصبح بالشكل التالي:

$$\log G=\frac{1}{n}\left(\log x_1+\log x_2+\log x_3+......+\log x_n\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

حيث أن log هو اللوغاريتم العشري كما أنه يمكن استعمال اللوغاريتم النيبيري نقوم بتطبيق الصيغة الأخيرة على المثال السابق:

$$\log G=\frac{1}{5}\left(\log 10+\log 14+\log 16+\log 7+\log 9\right)=1.0299$$

إذن قيمة الوسط الهندسي هي: $G=10^{1.0299}=10.71$

- مجالات تطبيق الوسط الهندسي:

تعتبر مجالات تطبيق الوسط الهندسي قليلة مقارنة بالوسط الحسابي، ومن أهم هذه المجالات هي كالتالي:

1- يستعمل في حساب الأرقام القياسية، حيث يعتبر من أحسن المتوسطات في هذا المجال لأنه يحقق كل الخصائص الرياضية للأرقام القياسية.

2- يستعمل في حساب المعدلات (معدل النمو، معدل سعر الفائدة، معدل التضخم، معدل نمو السكان ...إلخ).

مثال: نفرض أن1000 د.ج وضعت في بنك للادخار لمدة 9 سنوات بمعدل فائدة وزع بالشكل التالي: 5% في4 سنوات الأولى، 3% في السنتين التاليتين، 4% في3 سنوات الأخيرة، **المطلوب** تحديد معدل سعر الفائدة المتوسط خلال 9 سنوات؟.

الإجابة:

عند نهاية 9 سنوات سيصبح الرأس المال الأولي كالتالي، أو يحدد الرأس المال النهائي بالعلاقة التالي:

$$1000(1+r)^9 = 1000(1.05)^4(1.03)^2(1.04)^3$$

نقسم الطرفين على1000:

$$(1+r)^9 = (1.05)^4(1.03)^2(1.04)^3$$

ندخل اللوغاريتم على الطرفين:

$$9\log(1+r) = 4\log 1.05 + 2\log 1.03 + 3\log 1.04$$
$$\log(01+r) = 0.0179$$
$$1+r = 1.042 \Rightarrow r = 4.22\%$$

- **الوسط الهندسي المرجح: (Moyenne géométrique pondérée)**

تستعمل نفس الطريقة للحصول على علاقة الوسط الهندسي المرجح، مع الأخذ بعين الاعتبار أهمية وترجيحات قيم المتغير الإحصائي المدروس. وتعطى هذه العلاقة بالشكل التالي:

$\log G = \frac{1}{\sum n_i} \sum n_i \log x_i$ حيث أن n_i هي ترجيحات أو أهمية قيم المتغير الإحصائي، و x_i هي تلك القيم.

ج- الوسط *التوافقي*: (Moyenne Harmonique)

يمكن تعريف الوسط التوافقي بالشكل التالي: مقلوب الوسط التوافقي هو عبارة عن الوسط الحسابي لمقلوب قيم المتغير الإحصائي.

- **الوسط التوافقي البسيط:** لتكن: $x_1; x_2; x_3; \ldots\ldots\ldots\ldots; x_n$ قيم المتغير الإحصائي، حيث نرمز للوسط التوافقي بالرمز H، وحسب تعريف هذا الأخير فإن:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{x_i} \Rightarrow H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

- **الوسط التوافقي المرجح: (Moyenne Harmonique pondérée)**

تستعمل نفس الطريقة لوضع علاقة الوسط التوافقي المرجح، مع إدخال أهمية وترجيحات قيم المتغير الإحصائي: $H = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{x_i}}$.

ملاحظة:

إن مفهوم ومدلول الوسط التوافقي غير ظاهر مقارنة مع المقاييس والمتوسطات الأخرى، والمثال التالي يبين ذلك: الأرقام التالية تبين أسعار مادة معينة خلال ثلاث فترات: 35; 65; 80 د.ج من السهل أن نقول أن

متوسط السعر هو60 = $\overline{x} = \frac{80+65+35}{3}$ غير أن هذه النتيجة غير صحيحة لأن أهمية هذه السلعة أو المادة تختلف من فترة إلى فترة زمنية أخرى، فإذا كانت الميزانية المخصصة لشراء المادة تساوي 400 د.ج، فيمكن أن نقتني 11.42 وحدة في الفترة الأولى، و6.15 وحدة في الفترة الثانية، وأخيرا 5 وحدات في الفترة الثالثة، فعلى ضوء هذه المعلومات يصبح السعر المتوسط كالتالي:

$$\overline{x} = \frac{35(11.42)+65(6.15)+80(5)}{11.42+6.15+5} = 53.13$$

نلاحظ أن النتيجة الأولى (بدون ترجيح) تختلف عن النتيجة الثانية (مع الترجيح) ومن هنا يتضح أنه لا يمكن استعمال الوسط الحسابي في مثل هذه الحالات، بينما عند استعمال الصيغة البسيطة للوسط التوافقي سنلاحظ أن نتيجتها تساوي النتيجة الثانية لصيغة الوسط الحسابي، أي نتيجة الوسط التوافقي بدون ترجيح تساوي نتيجة الوسط الحسابي مع الترجيح، ماذا نستنتج من هذه الحالة؟ قبل أن نجيب على هذا التساؤل، نحدد قيمة الوسط التوافقي البسيط :

$$.\,H = \frac{3}{\frac{1}{35}+\frac{1}{65}+\frac{1}{80}} = 53.13$$

نستنتج من هذه الحالة أن مفهوم الوسط التوافقي هنا، مرتبط بالقدرة الشرائية، فكلما أرتفع السعر كلما انخفضت القدرة الشرائية والعكس صحيح.

عند استعمال صيغة الوسط الحسابي المرجح، سنجد نفس نتيجة الوسط التوافقي البسيط.

إذن حسب ما سبق نضع النتيجة التالية: **نستعمل الوسط التوافقي في حالة وجود علاقة عكسية بين ظاهرتين.**

- الوسط ألتربيعي:(Moyenne quadratique):

هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات قيم المتغير الإحصائي.

أ- الوسط ألتربيعي البسيط: $Q = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$.

ب- الوسط ألتربيعي المرجح: $Q = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{\sum n_i}}$.

ملاحظة:

نستعمل أحد المتوسطات المذكورة سابقا حسب نوع العلاقة الموجودة بين الخصائص المدروسة، وهذا وفق العلاقة العامة التالية: $f(x) = x^\alpha$، مثلا عندما تكون $\alpha = 1$ فالعلاقة تكون خطية بين الخصائص المدروسة، ونستعمل في هذه الحالة الوسط الحسابي. وعندما تكون $\alpha = -1$ فالعلاقة الموجودة بين الخصائص تكون عكسية، ونستعمل الوسط التوافقي.

الجدول التالي يبين ترتيب المتوسطات السابقة حسب قيمةα:

ج:2.2

α	-1	0	1	2
نوع الوسط	H	G	$\overline{x}$	Q

من الجدول السابق، نضع العلاقة التالية : $\mathbf{H < G < \overline{x} < Q}$

مثال: ليكن التوزيع التكراري التالي، المطلوب تحديد كل من الوسط الحسابي، الوسط الهندسي، الوسط التوافقي، والوسط ألتربيعي، ثم تحديد العلاقة بينهم:

ج:2.3

الفئات	n_i	x_i	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$	$n_i \cdot xi^2$	$\frac{n_i}{x_i}$	$n_i \cdot \log x_i$
0-10	2	5	-25	-50	50	0.4	1.39
-15 10	5	12.5	-17.5	-87.5	781.25	0.4	5.48
-25 15	13	20	-10	-130	5200	0.65	16.91
-35 25	15	30	0	0	13500	0.5	22.15
-40 35	16	37.5	7.5	120	22500	0.42	25.18
-50 40	22	45	15	330	44550	0.48	36.37
-60 50	14	55	25	350	42350	0.25	24.36
-70 60	6	65	35	210	25350	0.09	10.87
$\sum n_i$	93			742.5	154281.25	3.212	142.75

الحل:

1- تحديد الوسط الحسابي باستعمال وسط فرضي: يتم اختيار الوسط الفرضي من قيم x_0 (مراكز الفئات)، ومن الأفضل أن تقع هذه القيمة في منتصف قيم x_i، حيث أن أحسن قيمة للوسط الفرضي في هذا المثال هي $x_0 = 30$ (الجدول السابق يبين مختلف العمليات الحسابية) إذن:

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\sum n_i(x_i - x_0)}{\sum n_i} = 30 + \frac{742.5}{93} = 37.98$$

2- تحديد الوسط التربيعي: $Q = \sqrt{\dfrac{\sum n_i \cdot x_i^2}{\sum n_i}} = \sqrt{\dfrac{154281.25}{93}} = 40.73$

3- تحديد الوسط التوافقي: $H = \dfrac{\sum n_i}{\sum \dfrac{n_i}{x_i}} = \dfrac{93}{3.212} = 28.95$

4- تحديد الوسط الهندسي:

$$\log G = \frac{\sum n_i . \log x_i}{\sum n_i} \Rightarrow G = 10^{1.5349} = 34.27$$

من النتائج المتحصل عليها نلاحظ أن: $28.95 < 34.27 < 37.98 < 40.73$

إذن: $H < G < \overline{x} < Q$

2- **الوسيط:(Médiane)** هي تلك القيمة التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين متساويين، بحيث تكون قيم المتغير الإحصائي مرتبة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.

مثال: إذا كان وسيط أجور عمال مؤسسة ما يساوي 10000 د.ج، معنى ذلك أن 50% من العمال يتقاضون أجرا أقل من 10000 د.ج و50% الآخرون لهم أجرا أكبر من 10000 د.ج.

أ- الوسيط في حالة بيانات غير مبوبة: يتم تحديد الوسيط في حالة بيانات غير مبوبة حسب الخطوات التالية:

1- نرتب قيم السلسلة الإحصائية ترتيبا تصاعديا أو تنازليا.

2- نحدد ترتيب الوسيط، وهنا لابد أن نميز بين حالتين:

- عندما يكون عدد القيم N فردي، في هذه الحالة، ترتيب الوسيط هو عبارة عن: $\frac{N+1}{2}$.

- أما عندما يكون عدد القيم N زوجي، فلا توجد قيمة وسيطة، وفي هذه الحالة فإن قيمة الوسيط هي عبارة عن الوسط الحسابي للقيمتين ذات الترتيب $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$ على التوالي.

3- نضع قيمة الوسيط، و نرمز له بالرمز Me.

مثال: في حالة N فردي: تبين السلسلة الإحصائية التالية علامات 9 طلبة في مقياس الإحصاء، المطلوب تحديد الوسيط، 15 ; 9 ; 8 ; 11 ; 10 ; 13 ; 14 ; 7 ; 17 ;.

أولا: نرتب العلامات ترتيبا تصاعديا- 17;15; 14; 13; 11; 10; 9; 8;

ثانيا: نحدد ترتيب الوسيط $5 = \frac{9+1}{2}$: مرتبة الوسيط هي المرتبة الخامسة

إذن: $Me = 11$.

مثال: في حالة N زوجي: تبين السلسلة الإحصائية التالية علامات 10 طلبة في مقياس الرياضيات، 16;15; 13; 12; 12;11; 10; 9;7;6

أولا: مرتبة القيم التي تدخل في حساب الوسيط:

$$\frac{n}{2} = \frac{10}{2} = 5; \frac{n}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6.$$

ثانيا: تحديد قيمة الوسيط: $M_e = \frac{11+12}{2} = 11.5$.

ب- الوسيط في حالة بيانات مبوبة أو في حالة توزيع تكراري:

تختلف طريقة حساب الوسيط في هذه الحالة عن الحالة الأولى وهذا حسب الخطوات التالية:

1- تحديد التكرار التجميعي الصاعد أو النازل.

2- تحديد ترتيب الوسيط وهو عبارة عن نصف مجموع التكرارات أي

$$\frac{\sum n_i}{2}.$$

3- تحديد فئة الوسيط أي الفئة التي يقع فيها الوسيط، وهي الفئة التي تقابل التكرار التجميعي الصاعد (النازل) الذي يساوي ترتيب الوسيط أو الأكبر (الأصغر) منه مباشرة.

4- تحديد وحساب الوسيط بتطبيق العلاقة الإحصائية للوسيط.

مثال:يبين التوزيع التكراري التالي توزيع 80 مؤسسة حسب قيمة استثماراتها:

ج:2.4

الفئات	n_i	ت.ت.ص
90-100	5	5
100-110	9	14
110-120	16	30
120-130	25	55
130-140	13	68
140-150	7	75
150-160	3	78
160-170	2	80
$\sum n_i$	80	

المطلوب: تحديد الوسيط ؟.

الحل:

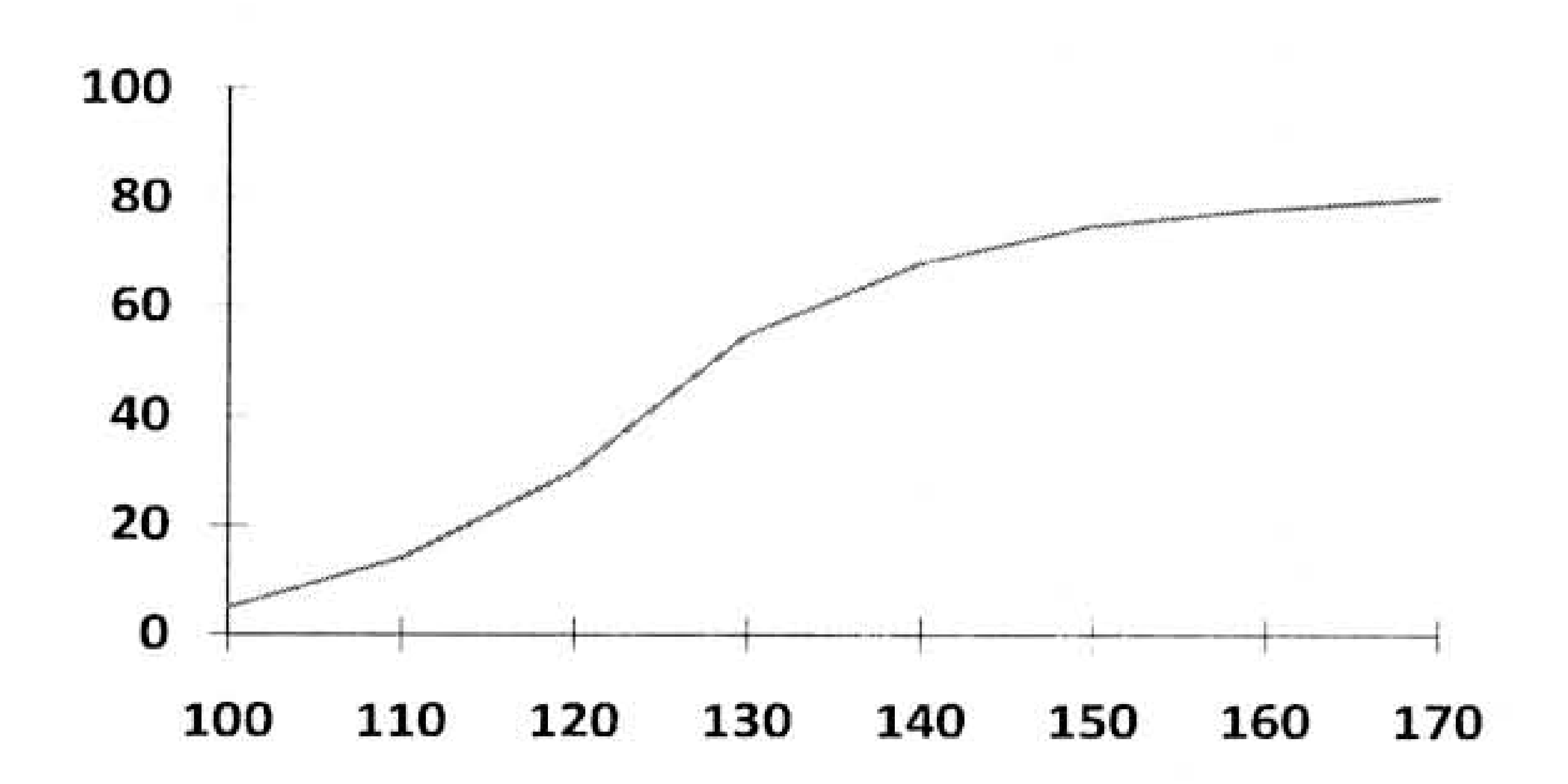
1- تحديد التكرار التجميعي الصاعد في العمود الثالث من الجدول.

2- ترتيب الوسيط: $\frac{\sum n_i}{2} = \frac{80}{2} = 40$

3- تحديد الفئة الوسيطة هي الفئة التي تقابل التكرار التجميعي الصاعد الذي يساوي 40 أو أكبر من 40 مباشرة، نلاحظ أن العدد 40 غير

موجود من بين ت.ت.ص ولكن العدد الأكبر منه مبــاشرة هو 55 إذن الفئة التي تقابل ت.ت.ص 55 هي الفئة الوسيطة [120-130].

4- رسم المنحنى التجميعي الصاعد لتحديد العلاقة الإحصائية للوسيط باستعمال طريقة ميل معادلة مستقيم، ولتحقيق ذلك، نفرض أن المنحنى التجميعي الصاعد هو عبارة عن خط مستقيم في المجال أو الفئة [120-130]، وبالتالي فإن الميل يكون ثابتا، ثم نستخرج علاقة الوسيط من النسب المتساوية التالية:



ش:2.2

مادام أن هذه المقادير متساوية، نختار مقدارين يحتويان على مجهول واحد ألا وهو الوسيط:

$$\frac{Me-120}{40-30}=\frac{130-Me}{55-40}=\frac{130-120}{55-30}$$ من المقدارين الأول والثاني نستخرج قيمة الوسيط:

$$Me = 120 + \frac{(40-30)(130-120)}{55-30} = 120 + \frac{(40-30)10}{25} = 124$$

انطلاقا من هذه العلاقة

نضع الشكل النهائي للعلاقة الإحصائية للوسيط:

$$M_e = A + \frac{\left(\frac{\sum n_i}{2} - M_{n-1}\right).K}{E_{SM_e}}$$

حيث أن: Aالحد الأدنى للفئة الوسيطة، K طول الفئة الوسيطة، M_{n-1} التكرار التجميعي الصاعد السابق للفئة الوسيطة، E_{SM_e} التكرار الأصلي للفئة الوسيطة.

ملاحظة: إن قيمة الوسيط هي قيمة تقريبية وتكون كذلك عند توفر الشروط التالية:

1- يجب ألا يكون طول الفئة كبيرا بشكل ملحوظ.

2- يجب أن يكون حجم المجتمع أو العينة هاما.

3- من الأفضل أن يكون التوزيع التكراري المدروس أقرب إلى التوزيع المتناظر.

ج: خصائص الوسيط:

1- يتغير الوسيط كلما غيرنا أطوال الفئات بالنسبة لنفس التوزيع التكراري إذن يتميز الوسيط بعدم الثبات.

2- لا يتأثر الوسيط بالقيم المتطرفة أو الشاذة.

3- يقسم المدرج التكراري إلى مساحتين متساويتين.

4- يستعمل الوسيط في عدة مجالات منها على وجه الخصوص: دراسة الأجور والأسعار، في نظرية أخطاء القياس، في دراسة الوفيات، في دراسة المدة المتوسطة للحياة...الخ.

3- الربيعيات: les Quartiles: نستعمل نفس الطريقة المتبعة لإيجاد الوسيط، غير أن الذي يتغير هو الترتيب و ما يترتب عنه.

تنقسم الربيعيات إلى ثلاثة أقسام: الربيعي الأول، الربيعي الثاني (الوسيط)، الربيعي الثالث.

أ- الربيعي الأول: (Premier quartile) هي قيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين، يحتوي القسم الأول على 25 % من الوحدات الإحصائية، أما القسم الثاني فيحتوي على 75 % من هذه الوحدات. تقع قيمة الربيعي الأول في نهاية الربع الأول من التوزيع الإحصائي، وفي هذا الموضع تكون مرتبته تساوي 25 % أو $\frac{\sum n_i}{4}$ حسب الترتيب التصاعدي لقيم المتغير الإحصائي، ويرمز له بالرمز Q_1.

العلاقة الإحصائية للربيعي الأول: $Q_1 = A + \frac{(\frac{\sum n_i}{4} - M_{n-1}).K_{Q_1}}{E_{SQ_1}}$.

حيث أن:

- K_{Q_1} : طول الفئة التي يقع فيها الربيعي الأول.
- E_{SQ_1} : التكرار البسيط لفئة الربيعي الأول.
- M_{n-1}: التكرار التجميعي الصاعد السابق لفئة الربيعي الأول.

- M_{n-1}: التكرار التجميعي الصاعد السابق لفئة الربيعي الأول.

خصائص الربيعي الأول: له نفس خصائص الوسيط.

مثال: نفس المثال السابق، مرتبة الربيعي الأول هي: $\frac{\sum n_i}{4} = \frac{80}{4} = 20$، فئته هي الفئة التي تقابل المرتبة 20 أو أكبر منها مباشرة ضمن ت.ت.ص وهي:] 110-120]، أما قيمته فتعطى بالعلاقة السابقة:

$$Q_1 = 110 + \frac{(20-14).10}{16} = 113.75$$

ب- **الربيعي الثالث:** (Troisième quartile) هو عبارة عن قيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع إلى قسمين، يحتوي القسم الأول على 75 % من المجتمع المدروس، أما القسم الثاني فيحتوي على 25 % المتبقية منه حسب الترتيب التصاعدي للمتغير المدروس، ويرمز له بالرمز Q_3، و مرتبته 75 % أو $\frac{3\sum n_i}{4}$.

علاقته الإحصائية: هي نفس علاقة الوسيط، طبعا مع تغيير في الفئة والتكرار التجميعي الصاعد السابق وكذلك التكرار الأصلي لفئة Q_3.

$$Q_3 = A + \frac{(\frac{3\sum n_i}{4} - M_{n-1}).K_{Q_3}}{E_{SQ_3}}$$

خصائصه: له نفس خصائص الوسيط.

مثال: نفس المثال السابق الخاص بالوسيط:

1- ترتيب Q_3: $\frac{3\sum n_i}{4}=\frac{3(80)}{4}=60$.

2- فئة Q_3 [130-140[.

3- قيمة Q_3: $Q_3=130+\frac{[60-55]}{13}.10=133.84$.

4- العشريات:(les Déciles): يوجد على طول مجال الدراسة 9 عشريات هي: $D_1;D_2;D_3;........;D_{10}$ مرتبة كل منها هي على التوالي:

$$\frac{\sum n_i}{10};\frac{2\sum n_i}{10};\frac{3\sum n_i}{10};.........;\sum n_i$$ أو

.10% ; 20% ; 30% ;..........;100%

العلاقة الإحصائية العامة للعشريات: نستعمل نفس فكرة الوسيط لتحديد هذه العلاقة وهي كالتالي:

$$D_i=A+\frac{(i\frac{\sum n_i}{10}-M_{n-1}).K}{E_{sD_i}}.$$

مثال: ليكن التوزيع التكراري التالي:

ج:2.5

الفئات	n_i	ت.ت.ص >	x_i	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$
0-4	3	3	2	−12	−36
4-8	6	9	6	−8	−48
8-10	7	16	9	−5	−35
10-12	9	25	11	−3	−27
12-16	16	41	14	0	0
16-20	13	54	18	4	52
20-26	8	62	23	9	72
26-30	5	67	28	14	70
30-40	3	70	35	21	63
$\sum n_i$	70				111

المطلوب ما يلي:

1- حدد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي؟.

2- حدد قيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع الإحصائي إلى قسمين متساويين؟.

3- حدد الربيعي الأول والثالث؟.

4- حدد العشيري الرابع والسادس؟.

الحل:

1- تحديد الوسط الحسابي بواسطة الوسط الفرضي: انطلاقا من العمليات الحسابية الموجودة في الجدول السابق، نقوم بتحديد الوسط الحسابي:

$$\cdot \overline{x} = x_0 + \frac{\sum n_i \cdot (x_i - x_0)}{\sum n_i} = 14 + \frac{111}{70} = 15.58$$

2- قيمة المتغير الإحصائي التي تقسم المجتمع إلى قسمين متساويين هي

الوسيط: $M_e = A + \dfrac{\left(\dfrac{\sum n_i}{2} - M_{n-1}\right).K}{E_{SM_e}}$، حيث أن ترتيب Me

هو: $\dfrac{\sum n_i}{2} = \dfrac{70}{2} = 35$، إذن فئة M_e هي:]12-16]، أما قيمة Me

فهي: $M_e = 12 + \dfrac{(35-25).4}{16} = 14.5$

3- تحديد الربيعي الأول والربيعي الثالث:

أ- حساب Q_1: ترتيب Q_1 هو: $\dfrac{\sum n_i}{4} = \dfrac{70}{4} = 17.5$، و فئة Q_1 هي:

[10-12] أما قيمة Q_1 فهي: $Q_1 = 10 + \dfrac{(17.5-16).2}{9} = 10.33$.

ب- حساب Q_3:

أولا: ترتيب Q3: $\dfrac{3\sum n_i}{4} = \dfrac{3 \times 70}{4} = 52.53$.

ثانيا: فئة Q_3] 16-20 [، أما قيمة Q_3 فهي:

$$Q_3 = 16 + \frac{(52.5-41).4}{13} = 19.538$$

4- تحديد العشيري الرابع و السادس:

أ- **حساب** D_4: ترتيبه هو $\dfrac{4.\sum n_i}{10} = \dfrac{4(70)}{10} = 28$، وفئته هي [12-16]

أما قيمته فهي $D_4 = 12 + \dfrac{(28-25).4}{16} = 12.75$.

ب- حساب D_6 : ترتيب D_6 هو $\frac{6\sum n_i}{10}=\frac{6(70)}{10}=42$ ، وفئته هي $[16-20[$ ، أما قيمته فهي $D_6=16+\frac{(42-41).4}{13}=16.3$.

5- المئينات:(les Percentiles): يمكن تعميم طريقة حساب الوسيط والعشريات إلى بقية مراتب قيم المتغير الإحصائي، حيث يمكن تحديد وحساب قيمة المتغير الإحصائي إذا عرفت مرتبته. ومن بين هذه القيم المئينات، و مراتبها على التوالي:

$1\%;2\%;3\%;4\%............;100\%$ ، أما العلاقة العامة لها فهي:

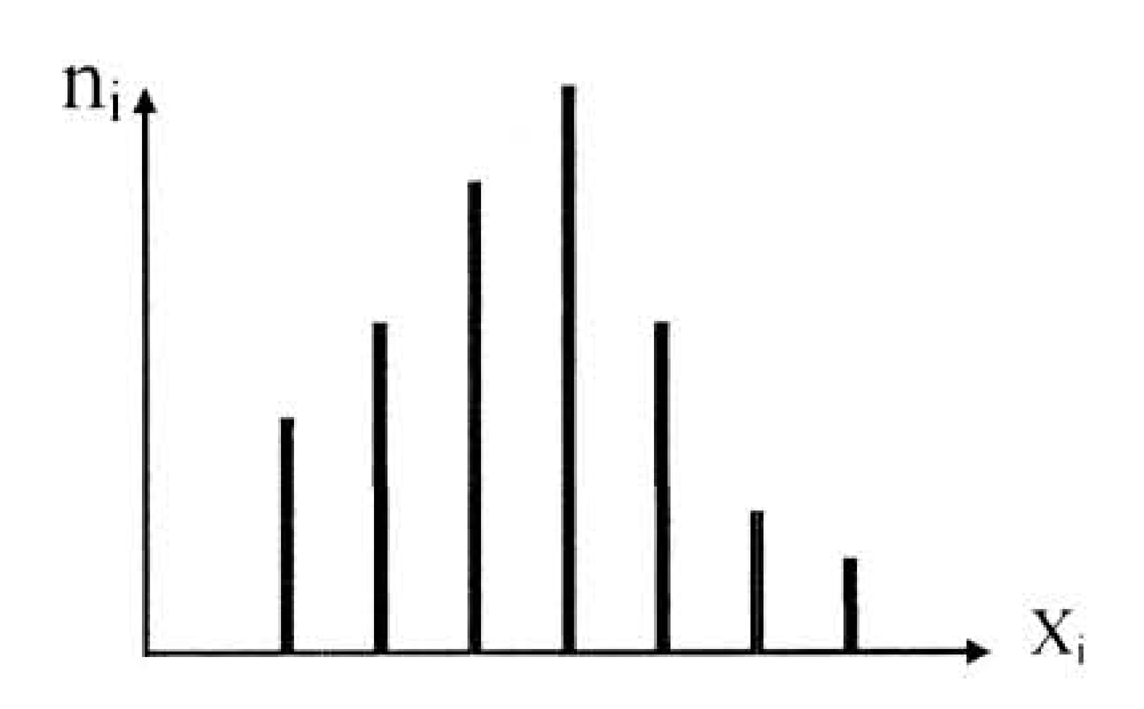
$$P_i = A + \frac{(\frac{i\sum n_i}{100} - M_{n-1}).K_{p_i}}{E_{s\,p_i}}.$$

حيث أن i هو مرتبة قيمة المتغير الإحصائي.

6- المنوال:(le Mode): هي قيمة المتغير الإحصائي الأكثر انتشارا أو تكرارا، ويرمز له بالرمز Mo.

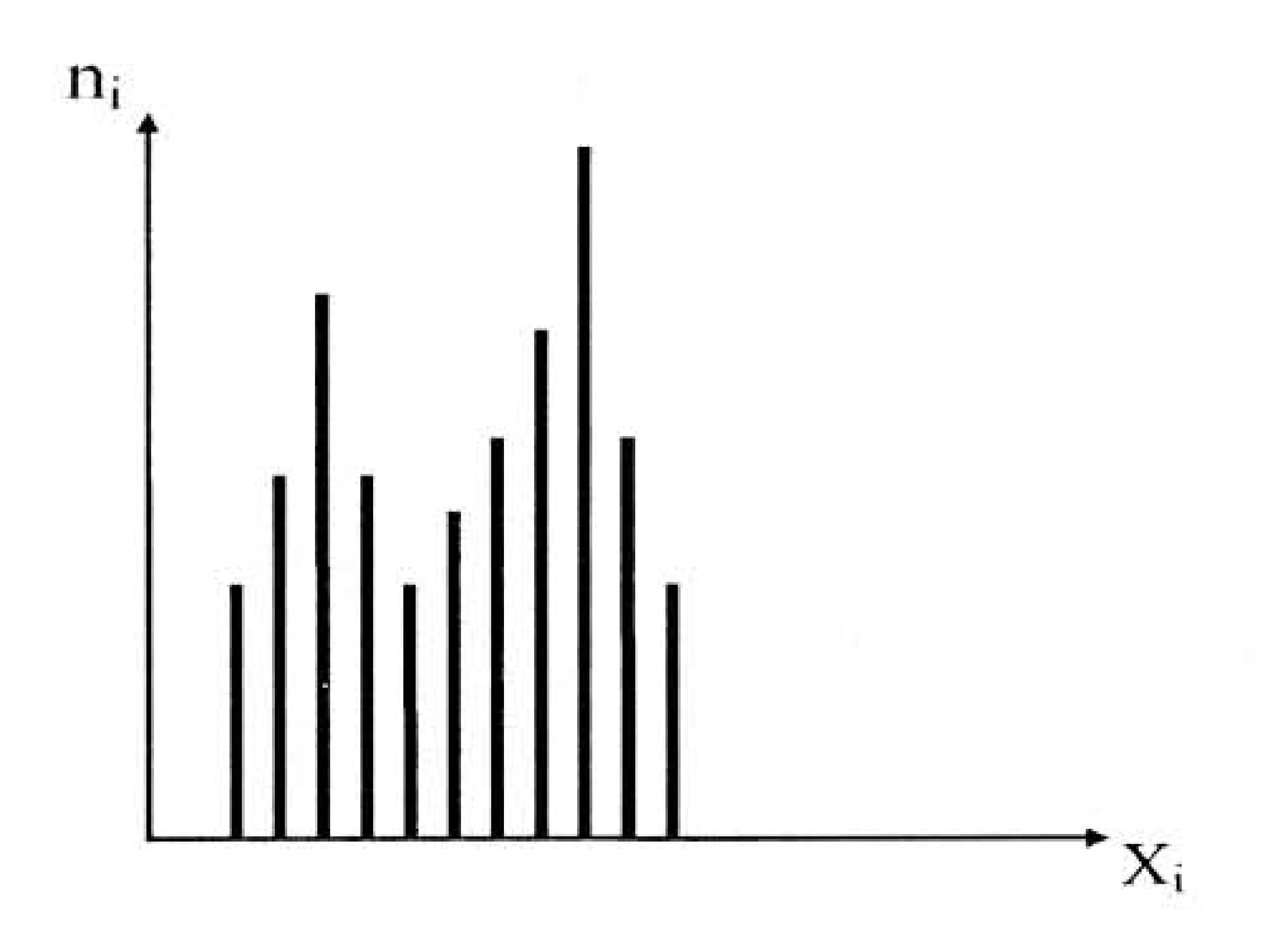
الحالات الممكنة لقيم المنوال: الأشكال التالية تبين مختلف الحالات الممكنة لقيم المنوال:

الحالة الأولى: توزيع تكراري وحيد المنوال، أي التوزيع الذي يحتوي على قيمة شائعة واحدة.



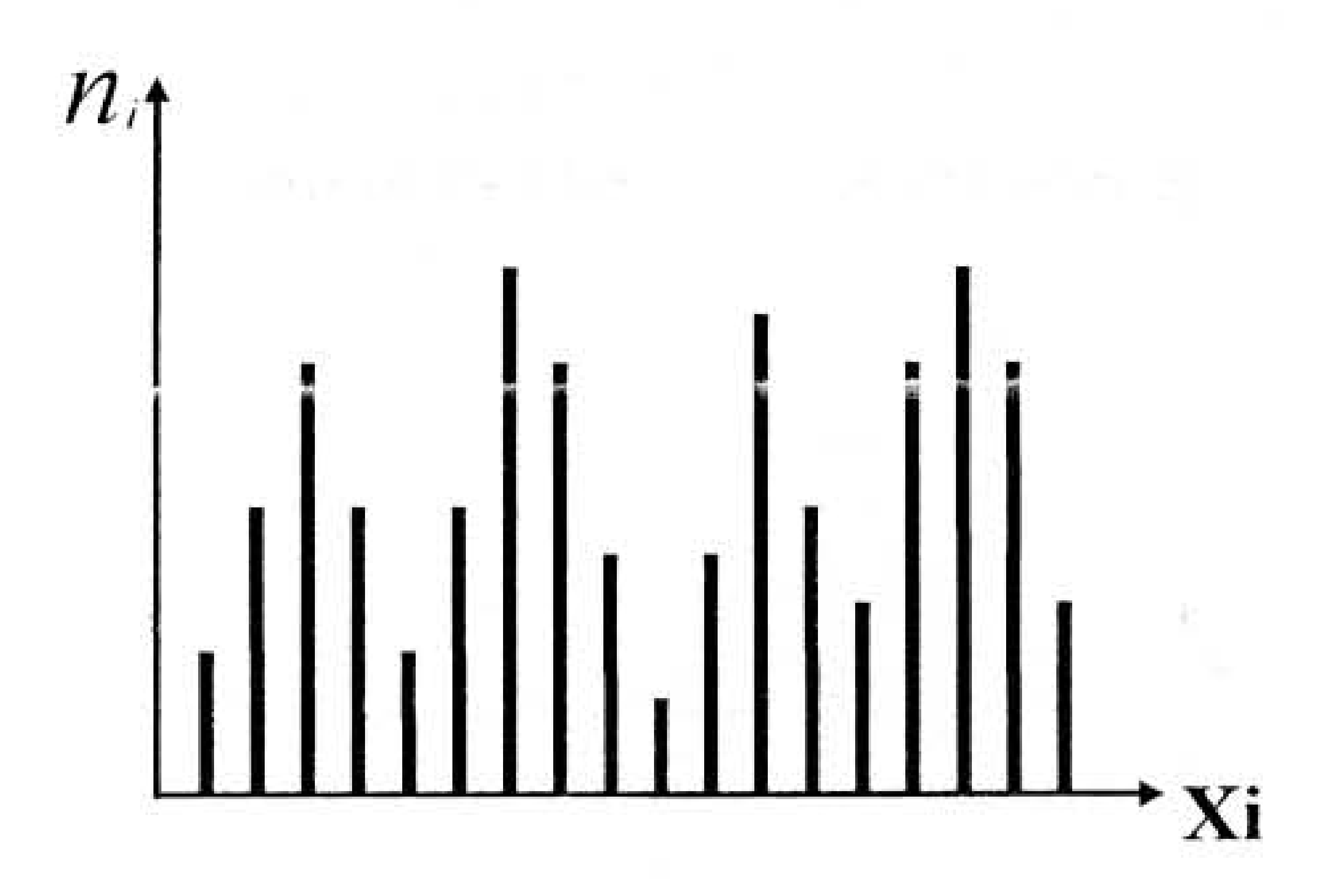
ش:2.3

الحالة الثانية: توزيع تكراري ثنائي المنوال، أي التوزيع الذي يحتوي على قيمتين شائعتين(أكثر تكرارا).



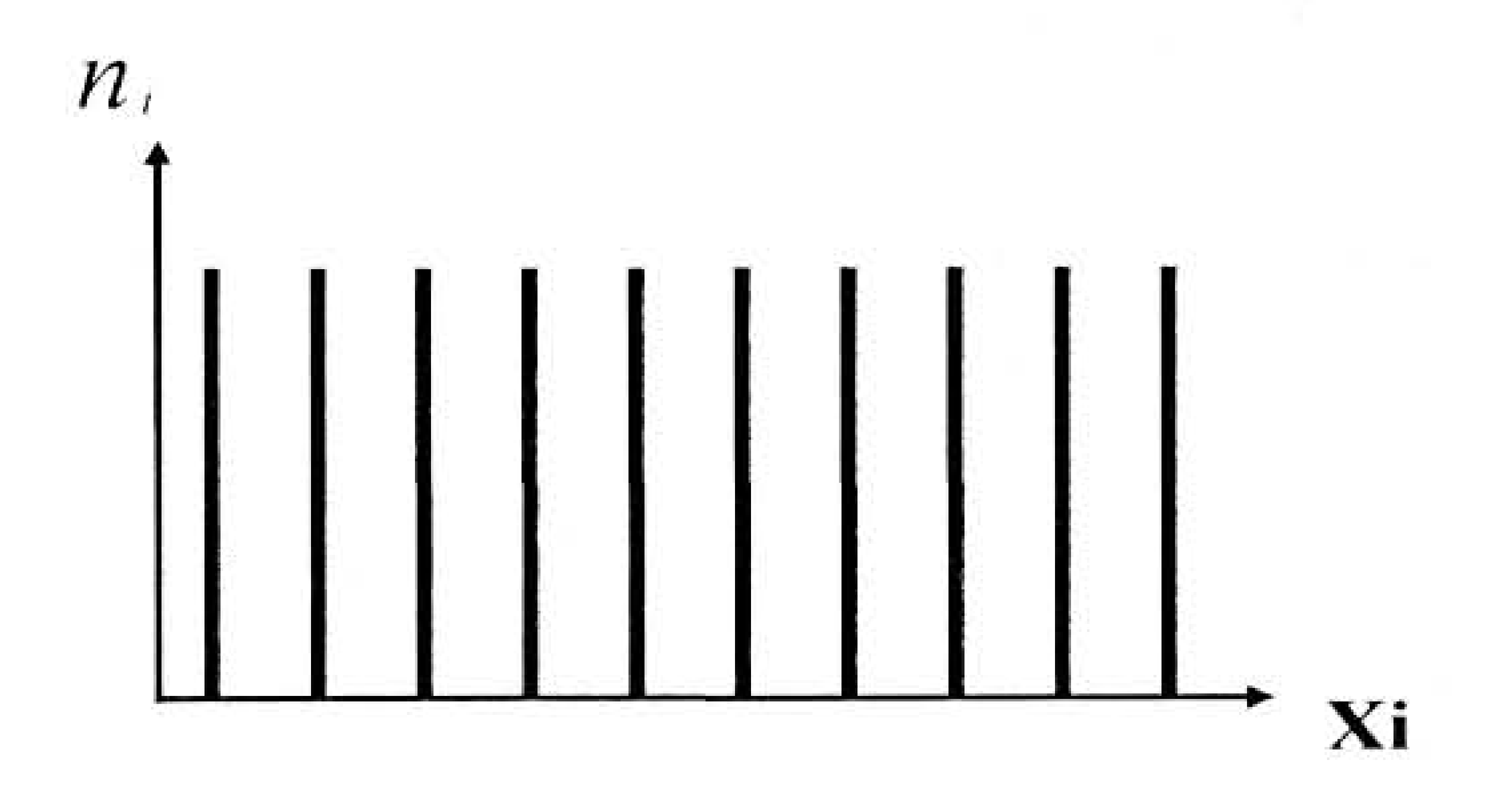
ش:2.4

الحالة الثالثة: توزيع تكراري متعدد المنوال، أي التوزيع الذي يضم على أكثر من منوالين، في هذه الحالة لا يكون للمنوال أي مدلول أو معنى إحصائي، ولا يستعمل كمقياس من مقاييس النزعة المركزية إلا في حالات استثنائية مثلا: عند تحديد مختلف الأغلبيات والتكتلات في البرلمنات المنتخبة.



ش:2.5

الحالة الرابعة: توزيع تكراري عديم المنوال، في هذه الحالة كل قيم المتغير الإحصائي لها نفس المستوى من الأهمية أي نفس التكرار، وهذه الحالة لا تحدث في الواقع إلا نادرا.



ش:2.6

1- المنوال في حالة بيانات غير مبوبة:

مثال: السلسلة الإحصائية التالية تبين علامات 10طلبة في الاقتصاد الجزئي 7;10;9;10;11;9;10;15;16;6 نلاحظ أن القيمة الأكثر تكرارا وانتشارا هي القيمة 10 إذن: $M_O = 10$، وهي سلسلة وحيدة المنوال.

2- المنوال في حالة بيانات مبوبة:

إن طريقة حساب المنوال في هذه الحالة تختلف عن الحالة الأولى، و لحسابه نتبع الخطوات التالية:

أ- **تحديد الفئة المنوالية:** وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرارا عندما يكون طول الفئة ثابت $(K = cons\tan te)$، أو الفئة التي تقابل أكبر تكرار معدل عندما تكون أطوال الفئات غير متساوية .

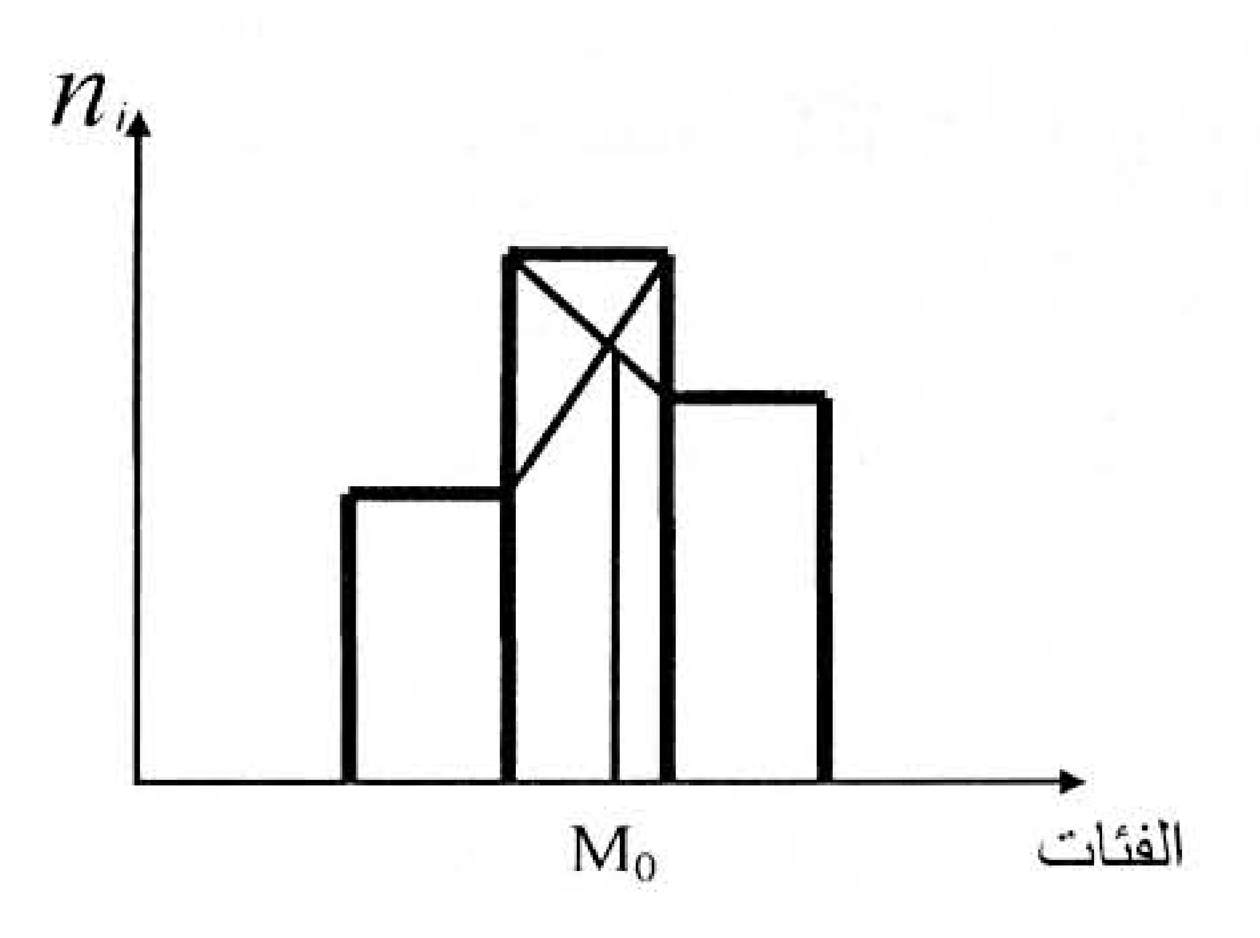
ب- **وضع المدرج التكراري** قصد تحديد علاقة المنوال، والعلاقة الأكثر انتشارا هي علاقة الفروق أو علاقة (Pearson).

مثال: يبين الجدول التالي توزيع مداخيل 50 عاملا في مؤسسة ما: المطلوب تحديد المنوال؟.

الحــل: نحدد علاقة المنوال حسب طريقة (Pearson) انطلاقا من المدرج التكراري التالي:

ج:2.6

الفئات	-40 30	-50 40	-60 50	-70 60	-80 70	-90 80	-100 90	$\sum n_i$
n_i	4	6	8	12	9	7	4	50



ش:2.7

ملاحظة: أكتفينا بالفئة الثالثة والرابعة والخامسة لتحديد المنوال، لأن هذا الأخير يعتمد أساساعلى الفئة المنوالية والفئة السابقة واللاحقة لها.

- **تحديد الفئة المنوالية:** وهي الفئة التي تقابل التكرار 12 (أكبر تكرار) لأن أطوال الفئات متساوية، وهذه الفئة هي]70 - 60]، نفرض أن Δ_1 هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها، Δ_2 هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها، X هو الفرق بين قيمة المنوال والحد الأدنى للفئة المنوالية، K طول الفئة المنوالية. من الشكل السابق، نلاحظ أن المقدارين التاليين متساويين:

$$\Delta_1(K-X)=\Delta_2 X \Rightarrow X=\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.K$$ ، علما أن: $M_0=A+X$

نعوض بقيمة X حسب العلاقة السابقة:

$$M_0=60+\frac{12-8}{(12-8)+(12-9)}.10=65.71$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل التالي: $Mo=A+\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2}.K$.

3- كيفية اختيار خاصية من خصائص النزعة المركزية:

يرتبط اختيار مقياس من مقاييس النزعة المركزية بطبيعة وهدف الدراسة وبنوع العلاقة الموجودة بين الخصائص المدروسة، فالأمثلة التالية تبين بعض هذه الحالات:

أ- **حالة استراد مادة استهلاكية أساسية:** في هذه الحالة نبحث عن الوسط الحسابي لتحديد الكمية المستوردة، فهذه الكمية هي عبارة عن الوسط الحسابي في حجم المجتمع $N \times \overline{x}$.

ب- يتطلع المهتمون إلى معرفة الكتلة البرلمانية ذات الأغلبية المطلقة أو النسبية عند دراسة نتائج الانتخابات البرلمانية وذلك باستعمال المنوال أي القيمة الأكثر انتشارا، أو عند إنتاج نوع من الملابس والأحذية، فالمنتج يقوم بإنتاج القياسات الأكثر استعمالا(المنوال).

ج- نبحث عن الأجر أو الدخل الذي يقسم المجتمع إلى قسمين متساويين أوغير متساويين، عند دراسة الأجور والمداخل(الوسيط أو الربيعيات).

د- يستعمل الوسيط كمقياس من مقاييس النزعة المركزية في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة لأنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة...الخ.

4- العلاقة بين الوسط الحسابي الوسيط والمنوال:

يقع الوسيط في كل الحالات بين الوسط الحسابي والمنوال، وذلك حسب الحالات التالية:

الحالة الأولى: تكون قيم المقاييس الثلاثة متساوية $\overline{x} = M_e = M_0$، في هذه الحالة يكون التوزيع التكراري المدروس متماثل أو متناظر.

الحالة الثانية: عندما يكون التوزيع التكراري المدروس غير متناظر من اليمين تكون قيم المقاييس الثلاثة بالشكل التالي $\bar{x} > M_e > M_0$.

الحالة الثالثة: عندما يكون التوزيع التكراري غير متناظر من اليسار، تصبح قيم المقاييس الثلاثة بالشكل التالي: $\bar{x} < M_e < M_0$.

تمارين محلولة خاصة بالفصل الثاني

التمرين الأول:

يبين الجدول التكراري التالي توزيع أجور عمال مؤسستين مختلفتين:

ج:2.7

الفئات	$p_i(1)$	$p_i(2)$	x_i	$p_i \times x_i(1)$	$p_i \times x_i(2)$	ت.ن.ت.ص(2)
18-28	0.042	0.0279	23	0.966	0.64	0.0279
28-36	0.357	0.335	32	11.42	10.72	0.3629
36-48	0.378	0.223	42	15.87	9.36	0.5859
48-50	0.126	0.167	49	6.174	8.18	0.7525
50-66	0.04	0.1117	58	2.32	6.47	0.8646
66-78	0.029	0.078	72	2.088	5.61	0.9426
78-88	0.0168	0.033	83	1.394	2.739	0.9756
88-98	0.0084	0.0223	93	0.781	2.07	1
$\sum p_i$	1	1				
$\sum p_i \times x_i$				41.023	45.789	

المطلوب:

1- حدد الوسط الحسابي باستعمال علاقة التعريف في المؤسستين، ماذا تلاحظ؟

2- حدد كل من الوسيــط، العشيري الثالث (D3)، والمئيني الأربعين في المؤسسة الثانية؟.

التمرين الثاني:

تبين السلسلة الإحصائية التالية مراكز الفئات لتوزيع تكراري:

$3.21 - 3.24 - 3.27 - 3.3 - 3.33 - 3.36 - 3.39 - 3.42$

المطلوب تحديد ما يلي:

1- طول الفئة ؟.

2- المدى العام ؟.

3- حدود الفئات ؟.

التمرين الثالث:

يرتـــفع إنتاج مادة معينة خلال أربع سنوات بالشكل التالي على التوالي 100 – 200 – 300 – 400 ، ويتناقص إنتاج مادة أخرى خلال نفس الفترة بالشكل التالي على التوالي 5 – 10 – 15 – 20 .

المطلوب ما يلي:

1- ما هي معدلات النمو من سنة إلى أخرى؟.

2- ما هو متوسط معدل النمو للفترة المدروسة؟ ماذا تلاحظ؟.

التمرين الرابع:

يبين التوزيع التكراري التالي توزيع النفقات الاستهلاكية الشهرية (بآلاف الدينارات) لعينة من الأسر سحبت بطريقة عشوائية من مجتمع معين:

ج:2.8

الفئات	n_i	x_i	≤	E_r
8−10	4	9	4	2
10−12	n2	11	$26-n_5$	3
12−15	12	13.5	$38-n_5$	4
15−18	15	16.5	$53-n_5$	5
18−20	n5	19	53	8
20-24	28	22	81	7
24−B	24	26	105	6
B-30	10	29	115	5
30−33	12	31.5	127	4
33−36	9	34.5	136	3
36−40	4	38	140	1
$\sum n_i$	140			

المطلوب ما يلي:

1- أوجد قيم كل من $n_2;n_5$، علما أن العشيري الثالث $D_3=18.625$ ؟.

2- أوجد الحد الأعلى للفئة السابعة علما أن الوسط الحسابي هو $\overline{x}=22.757$ ؟.

3- ما هو العرض البياني المناسب؟.

4- حدد الإنفاق الاستهلاكي للأسرة ذات المرتبة 75%؟.

5- أدرس شكل هذا التوزيع باستعمال المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية ؟

التمرين الخامس:

أشترى أحد الأشخاص، في بداية الشهر، 2000 € من السوق الموازية بسعر 1€ =14د.ج، وفي نهاية نفس الشهر أستبدل 5000€، ومن نفس السوق بسعر 1€ = 14.5 د.ج. المطلوب تحديد سعر الصرف المتوسط؟.

التمرين السادس:

قام مصححان بتصحيح، كل منهما، مجموعة من أوراق امتحان إحدى المسابقات فكانت النتائج كالتالي:

ج:2.9

الفئات	$n_{1.i}$	$n_{2.i}$
0−3	15	20
3−8	35	25
8−10	45	40
10−12	28	35
12−14	20	18
14−16	12	3
16−20	4	2
$\sum n_i$	159	143

المطلوب ما يلي:

1- وضع العرض البياني المناسب؟.

2- تحديد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي للتوزيعين؟.

3- حساب المعدل العام للطلبة؟.

4- تحديد العلامة المتحصل عليها من طرف أغلبية الطلبة لكل توزيع؟.

5- تحديد شكل التوزيعين باستعمال الخصائص الثلاثة للنزعة المركزية؟.

6- تحديد علامة الطالب ذو المرتبة 20% ؟.

7- إذا لوحظ وجود فرق بين علامات المصححين، كيف يتم تقليص هذا الفرق؟.

التمرين السابع:

يبين التوزيع التكراري التالي تطور عدد الطلبة في السنة الثالثة علوم اقتصادية حسب التخصصات التالية خلال 10سنوات الأخيرة:

ج:2.10

التخصصات	85/86	95/96
محاسبة	300	450
مالية	160	300
إدارة أعمال	70	100
تجارة دولية	40	90
تسويق	50	80
اقتصاد تطبيقي	40	60
$\sum n_i$	660	1080

المطلوب ما يلي:

1- ضع العرض البياني المناسب؟.

2- حدد المعدل السنوي المتوسط لتطور عدد الطلبة في كل فرع؟.

3- حدد الوسط الحسابي لتطور عدد الطلبة في كل فرع؟.

4- حدد الوسط الحسابي المرجح للمعدلات السنوية المتوسطة (نأخذ بعين الاعتبار ترجيحات سنة 85/86)؟.

5- حدد المعدل السنوي المتوسط لمجموع الطلبة في الفترتين؟.

6- ماذا تلاحظ من نتيجة السؤال الرابع والخامس؟.

التمرين الثامن: بين صحة العلاقة التالية

$2\sum n_i \cdot x_i = 2A\sum n_i + K\sum n_i$ علما أن: $\bar{x} = M_e = M_0$.

التمربن التاسع:

يبين التوزيع التكراري التالي الوضعية المالية للبنك المركزي الجزائري من جانب الخصوم بملايين الدينارات في سنة 1982 و1990 .

ج:2.11

الخصوم	1982	1990
القاعدة النقدية	50575	137922
خصوم خارجية	238	9206
ودائع الدولة	315	5356
بنود أخرى للخصوم	13222	43811
$\sum n_i$	64350	196296

المطلوب ما يلي:

1- ضع العرض البياني المناسب؟.

2- أحسب المعدل السنوي المتوسط لتطور الخصوم بأنواعها؟.

3- حدد الوسط الحسابي لتطور الخصوم بأنواعها؟.

4- حدد المعدل العام المتوسط لتطور الخصوم؟.

5- ما هو نوع المتغير المدروس، وما هو نوع السلسلة الإحصائية المدروسة؟.

حل تمارين الفصل الثاني

التمرين الأول:

1- تحديد الوسط الحسابي:

أ- في المؤسسة الأولى: $\overline{x}_1 = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{\sum n_i} = \sum p_i \cdot x_i = 41.123$، نفرض أن $\frac{n_i}{\sum n_i} = p_i$ لأن التكرارات المعطاة هي تكرارات نسبية.

ب- في المؤسسة الثانية: $\overline{x}_2 = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{\sum n_i} = \sum p_i \cdot x_i = 45.81$. نلاحظ أن متوسط الأجر في المؤسسة الثانية أكبر من متوسط الأجر في المؤسسة الأولى رغم وجود نفس مجال الدراسة أي نفس المدى العام.

2- تحديد الوسيط والعشيري الثالث والمئيني الأربعين في المؤسسة الثانية:

أ- انطلاقا من العمود السابع لجدول المعطيات فإن الفئة الوسيطية هي $[36-48[$ لأن ترتيب الوسيط هنا هو 50% أي لأننا في حالة تكرارات نسبية، إذن قيمة الوسيط هي:

$$Me = 36 + \frac{[50 - 36.29]12}{22.3} = 43.37$$.

ب- حساب العشيري الثالث(D_3): مرتبته هي 30 %، والفئة التي ينتمي إليها هي $]28-36]$ إذن قيمته هي:

$$. D_3 = 28 + \frac{[30-2.79]8}{33.5} = 34.4979$$

ج - حساب المئيني الأربعين (C_{40}): مرتبته هي 40 % وفئته هي [36-48[إذن تعطى قيمته بالشكل التالي: $C_{40} = 36 + \frac{[40-36.29]12}{22.3} = 37.996$.

التمرين الثاني:

أ- تحديد طول الفئة: نلاحظ أن الفرق بين مراكز الفئات ثابت، معنى ذلك أن طول الفئات متساو وثابت إذن طول الفئة $K = 0.03$.

ب- تحديد المدى العام: أولا نحدد الحد الأدنى للمجال:

الحد الأدنى=مركز الفئة الأولى- نصف الفئة

أي أن: $A = 3.21 - \frac{0.03}{2} = 3.195$ ، بنفس الطريقة نحدد الحد الأعلى للمجال، ونرمز له بالرمز B حيث أن: $B = 3.42 + \frac{0.03}{2} = 3.435$ ،

إذن المدى العام هو $3.435 - 3.195 = 0.24$ ، أو أن المدى العام = طول الفئة × عدد الفئات أي أن: $8 \times 0.03 = 0.24$ = المدى العام

ج- لتحديد حدود الفئات نضيف طول الفئة إلى الحد الأدنى للمجال للحصول على الفئة الأولى، ثم نضيف طول الفئة للحد الأعلى للفئة الأولى للحصول على الفئة الثانية وهكذا حتى تنتهي العملية، إذن الفئات على التوالي هي:

$$[3.195-3.225[,[3.225-3.255[,[3.255-3.285[,[3.285-3.315[,$$
$$[3.315-3.345[,[3.345-3.375[,[3.375-3.405[,[3.405-3.435[.$$

التمرين الثالث:

1- معدلات النمو من سنة إلى أخرى: نرمز لهذه المعدلات بالرمز T_i.

أ- بالنسبة للمادة الأولى:

- بين السنة الأولى والثانية: $T_1 = \left[\frac{200}{100} - 1\right].100 = 100\%$.
- بين السنة الثانية والثالثة : $T_2 = \left[\frac{300}{200} - 1\right].100 = 50\%$.
- بين السنة الثالثة والرابعة: $T_3 = \left[\frac{400}{300} - 1\right].100 = 33\%$.

ملاحظة:نلاحظ أن معدل النمو يزداد بزيادة متناقصة، أي تناقص في سرعة وتيرة النمو، رغم ثبات الزيادة في النمو والتي تساوي 100.

ب- بالنسبة للمادة الثانية:

- بين السنة الأولى والثانية: $T_1 = \left[\frac{15}{20} - 1\right].100 = -25\%$.
- بين السنة الثانية والثالثة: $T_2 = \left[\frac{10}{15} - 1\right].100 = -33\%$.
- بين السنة الثالثة والرابعة: $T_3 = \left[\frac{5}{10} - 1\right].100 = -50\%$.

نلاحظ أن الانخفاض في إنتاج هذه المادة ثابت ويساوي إلى 5، ولكن سرعة التباطؤ في تزايد.

2- تحديد متوسط معدل النمو لأربع سنوات:

أ- بالنسبة للمادة الأولى:

$$(1+i)^3=(1+1)(1+0.5)(1+0.33)\Rightarrow(1+i)^3=3.99$$
$$3\log(1+i)=\log3.99\Rightarrow\log(1+i)=\frac{1}{3}.\log3.99=\frac{0.6009}{3}=0.2003$$
$$\log(1+i)=\log1.586\Rightarrow i=58.6\%$$

ب- بالنسبة للمادة الثانية:

$$(1+i)^3=(1+0.25)(1-0.33)(1-0.5)=0.25125$$
$$(1+i)\ =\sqrt[3]{0.25125}=0.631\Rightarrow i=0.631-1=-0.368=-36.8\%$$

التمرين الرابع:

1- تحديد قيم كل من $n_5;n_2$: لتحديد هذه القيم نضع المعادلتين التاليتين

$$\sum n_i=4+n_2+12+15+n_5+28+24+10+12+9+4=140$$
$$n_2+n_5+118=140\Rightarrow n_2=22-n_5......(1)$$

ولدينا كذلك: $D_3=18.25$ لوضع العلاقة كاملة، نبحث أولا عن ترتيب D_3 ثم نحدد فئته:

الترتيب هو: $140\times0.3=42$، أما فئته فهي $[18-20[$ حسب التكرار التجميعي الصاعد، بالتعويض في علاقة D_3 نتحصل على ما يلي:

$18.625 = 18 + \frac{(42-(31+n_2)).2}{n_5}$ ، أي أن المعادلة الثانية تعطى بالشكل التالي: $n_2 = 11 - 0.33125.n_5 .....(2)$

إذن بناءا على المعادلتين الأولى و الثانية فإن قيم كل من $n_5 ; n_2$ هما كالتالي:

$$n_5 = 16 ; n_2 = 6$$

2- تحديد الحد الأعلى للفئة السابعة علما أن الوسط الحسابي يساوي: $\overline{x} = 22.757$ ، بالتعويض في هذه المعادلة تتحصل على ما يلي:

$$\sum n_i .22.757 = \sum x_i \cdot n_i \Rightarrow \sum x_i \cdot n_i = 140 \times 22.757$$

$$3185.98 = 36 + 66 + 162 + 247.5 + 304 + 616 + 24\frac{(24+B)}{2} + 10\frac{(B+30)}{2}$$
$$+378 + 310.5 + 152$$

$$3185.98 = 2272 + 12(24+B) + 5(B+30) \Rightarrow B = \frac{476}{17} = 28$$

3- العرض البياني المناسب هو المدرج التكراري بعد تعديل التكرارات لأن أطوال الفئات غير متساوية.

4- تحديد قيمة الإنفاق الاستهلاكي الذي تبلغ مرتبته 75%: إن قيمة المتغير الإحصائي الذي تبلغ مرتبته 75% هو الربيعي الثالث، ولحسابه، نحدد أولا التكرار التجميعي الصاعد، ونلاحظ من جدول المعطيات أن فئة الربيعي الثالث هي:]28 – 24].

والحد الأعلى لهذه الفئة يساوي مرتبة Q_3 وفي هذه الحالة نستنتج مباشرة أن قيمة الإنفاق الاستهلاكي تساوي الحد الأعلى أي القيمة $Q_3 = 28$، وعند تطبيق علاقة Q_3 سنجد نفس القيمة أو نفس النتيجة.

5- دراسة شكل التوزيع باستعمال $M_0 ; M_e ; \overline{x}$: أولا نقوم بتحديد قيم هذه المقاييس ثم نقارن بينها علما أن الوسط الحسابي معطى، أما القيم الأخرى فهي كالتالي:

أ- حساب M_0 : الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل أكبر تكرار معدل، ومن الجدول نلاحظ أن هذه الفئة هي $]18-20[$ أما المنوال فيساوي:

$$.\, M_0 = 18 + \frac{(8-5)\times 2}{(8-5)+(8-7)} = 19.5$$

ب- حساب M_e : ترتيبه هو $140 \times 0.5 = 70$ وفئتـــه هي $]20-24[$ أما قيمته فهي: $M_e = 20 + \frac{(70-53)}{28}.4 = 22.428$

حسب قيم الخصائص الثلاثة للنزعة المركزية، نستنتج أن التوزيع المدروس غير متناظر من اليسار لأن $\overline{x} > M_e > M_0$.

التمرين الخامس:

يمكن استعمال الوسط الحسابي أو الوسط التوافقي لتحديد سعر الصرف المتوسط وكل منهما يعطي نفس النتيجة:

$$\bar{x} = \frac{2000\times 14 + 5000\times 14.5}{7000} = 14.357$$

$$H = \frac{7000}{\frac{2000}{14} + \frac{5000}{14.5}} = 14.353$$

التمرين السادس:

يحتوي الجدول التالي الحسابات الضرورية للإجابة على الأسئلة المطروحة:

ج:2.12

E_{i1r}	E_{i2r}	x_i	$n_{i1}(x_i - x_0)$	$n_{i2}(x_i - x_0)$	ت.ت.ص	ت.ت.ن
5	6.66	1.5	−142.5	−190	15	20
7	5	5.5	−192.5	−137.5	50	45
22.5	20	9	−90	−80	95	85
14	17.5	11	0	0	123	120
10	9	13	40	36	143	138
6	1.5	15	48	12	155	141
1	0.5	18	28	14	159	143
			−309	−345.5		

1- العرض البياني المناسب في كلا الحالتين هو المدرج التكراري، وذلك بعد تعديل التكرارات.

2- تحديد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي: الوسط الفرضي في كلا الحالتين $x_0 = 11$.

أ- الوسط الحسابي للتوزيع الأول:

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\Sigma n_{i1}(x_i - x_0)}{\Sigma n_{i1}} \Rightarrow \overline{x} = 11 + \frac{-309}{159} = 9.056$$

ب- الوسط الحسابي للتوزيع الثاني: $\overline{x} = 11 + \frac{-345.5}{143} = 8.5839$

3- حساب المعدل العام: $\overline{x} = \frac{9.056 \times 159 + 8.5839 \times 143}{159+143} = 8.832$

159+143

4- تحديد العلامة المتحصل عليها من طرف أغلبية الطلبة:

أ - بالنسبة للتوزيع الأول: الفئة المنوالية هي الفئة التي تقابل التكرار 22.5 (أكبر تكرار معدل) وهي $[8-10[$، مع العلم أننا نستعمل التكرار المعدل لحساب المنوال ، وقيمته هي كالتالي:

$$M_0 = 8 + \frac{(22.5-7).2}{(22.5-7)+(22.5-14)} = 9.29 \; .$$

ب- بالنسبة للتوزيع الثاني:

الفئة المنوالية هي $[8-10[$، أما قيمة المنوال فهي:

$$M_0 = 8 + \frac{(20-5).2}{(20-5)+(20-17.5)} = 9.714 \; .$$

5- تحديد شكل التوزيع باستعمال المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية:

أ- حساب هذه المقاييس: لقد تم حساب كل من الوسط الحسابي والمنوال للتوزيعين، و نقوم بحساب الوسيط:

1- وسيط التوزيع الأول: مرتبته هي $\frac{159}{2}=79.5$ أما فئته فهي $[8-10[$

إذن قيمة الوسيط هي كالتالي:

$$M_e=8+\frac{(79.5-50).2}{45}=9.31$$

2- وسيط التوزيع الثاني: مرتبته هي $\frac{143}{2}=71.5$، أما فيئته فهي $[8-10[$، إذن قيمته هي:

$$M_e=8+\frac{(71.5-45).2}{40}=9.325$$

إن شكل التوزيع الأول حسب قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال هو كالتالي: $M_e>M_0>\overline{x}$ معنى ذلك أن التوزيع غير متماثل من اليمين.

أما شكل التوزيع الثاني فهو كذلك غير متماثل من اليمين لأن:

$$M_0>M_e>\overline{x}$$

6- تحديد علامة الطالب ذو المرتبة 20 %: نكتفي بحساب هذه العلامة بالنسبة للتوزيع الأول، فمرتبته هي $159\times0.2=31.8$، و حسب هذه المرتبة فإن فئة العشيري الثاني هي $[3-8[$ أما قيمته فهي:

$$D_2=3+\frac{(31.5-15).5}{35}=2.40$$

7- نلاحظ أن هناك فرق بين المعدلين، ولتوحيد علامات التوزيعين نستعمل النسبة بين المعدل العام و الوسط الحسابي:

أ- بالنسبة للتوزيع الأول: $\frac{8.832}{9.056} = 0.975$، لتوحيد علامات التوزيع الأول يجب ضرب علامات المصحح الأول × 0.975.

ب- بالنسبة للتوزيع الثاني: $\frac{8.832}{8.583} = 1.029$، يجب ضرب علامات المصحح الثاني × 1.029، حتى نتحصل على علامات منسجمة.

التمرين السابع:

1- العرض البياني المناسب هو الأعمدة المتلاصقة، لأن توزيع الطلبة في السنة الثالثة يتم حسب الفروع وحسب الزمن.

للإجابة على بقية الأسئلة نضع الجدول التالي:

ج:2.13

الفروع	85/86	95/96	المعدل خلال 11سنة	معدل سنوي متوسط	متوسط سنوي x_i	$n_i \cdot x_i$
محاسبة	300	450	0.5	0.037	0.0454	13.62
مالية	160	300	0.875	0.058	0.0795	12.72
إدارة أعمال	40	90	1.25	0.076	0.1136	4.54
تجارة دولية	70	100	0.4281	0.0329	0.0389	2.723
تسويق	50	80	0.6	0.0436	0.0545	2.725
اقتصاد تطبيقي	40	60	0.5	0.037	0.0454	1.816
$\sum n_i$	660	1080		0.0457	0.0578	38.148

2- تحديد المعدل السنوي المتوسط لكل فرع :

أ- فرع المحاسبة: $(1+i)^{11} = 1.5 \Rightarrow i = 1.5^{0.09} - 1 = 3.754\%$

ونتبع نفس الطريقة بالنسبة للفروع الأخرى، كما هو مبين في الجدول السابق.

3- تحديد الوسط الحسابي لتطور الطلبة في كل الفروع :

بالنسبة لفرع المحاسبة: $\overline{x} = \frac{0.5}{11} = 0.0454$.

ونفس الشيء يمكن فعله بالنسبة لبقية الفروع، كما هو مبين في العمود السادس من الجدول السابق.

4- تحديد الوسط الحسابي المرجح (نأخذ بعين الاعتبار ترجيحات 85/86):

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{\sum n_i} = \frac{38.148}{660} = 5.78\%$$

5- تحديد المعدل السنوي العام المتوسط:

$$(1+i)^{11} = \frac{1080}{660} = 1.636 \Rightarrow i = 4.57\%$$

6- نلاحظ من نتيجة السؤالين 4 و 5 أنهما مختلفتين اختلافا كبيرا، لأننا في(4) اعتمدنا على ترجيحات سنة 85/86، بينما (5) يبين تطور الظاهرة في كل سنة، أي لابد أن نفرق و نميز بين نتيجة الوسط الحسابي والوسط الهندسي.

التمرين الثامن:

نبين صحة العلاقة: $2\sum n_i \cdot x_i = 2A.\sum n_i + K.\sum n_i$ علما أن:

$$.\overline{x} = M_0 = M_e$$

أي أن التوزيع متناظر، نلاحظ من صيغة العلاقة السابقة أن الأمر يتعلق بالوسط الحسابي والمنوال، أي أن:

$\frac{\sum n_i \times x_i}{\sum n_i} = A + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times K$، نضرب الطرفين في $\sum n_i$، حيث أن: $\Delta_1 = \Delta_2$ لأن التوزيع متناظر، ووفق هذه المعلومات تصبح العلاقة بالشكل التالي:

$\sum n_i \cdot x_i = A.\sum n_i + \frac{1}{2}K.\sum n_i$ ثم نضرب الطرفين في 2 لنتحصل على المطلوب.

التمرين التاسع:

1- العرض البياني المناسب هو الأعمدة المتلاصقة.

للإجابة على مختلف الأسئلة نضع جدول الحسابات التالي:

ج:2.14

الوسط الحسابي%	المعدل المتوسط%	نسبة التطور%
19.188	11.79	172.7
418.67	50.1	3768.06
177.81	37	1600.3
25.7	14.23	231.341
22.78	13.19	205.04

2- المعدل السنوي المتوسط لتطور الخصوم بأنواعها موجود بالعمود الثاني.

3- الوسط الحسابي لتطور الخصوم بأنواعها موجود بالعمود الثالث.

4- المعدل العام المتوسط لتطور الخصوم:

$$(1+i)^9 = \frac{196296}{64350} \Rightarrow i = 13.19$$

5- المتغير المدروس هي الخصوم ومقاسه بملايين الدينارات، ونوع السلسلة الإحصائية هي سلسلة زمنية لأن المتغير الكمي المستمر يتغير في الزمن.

الفصل الثالث

مقاييس التشتت والشكل

Caractéristiques de dispersion et de forme

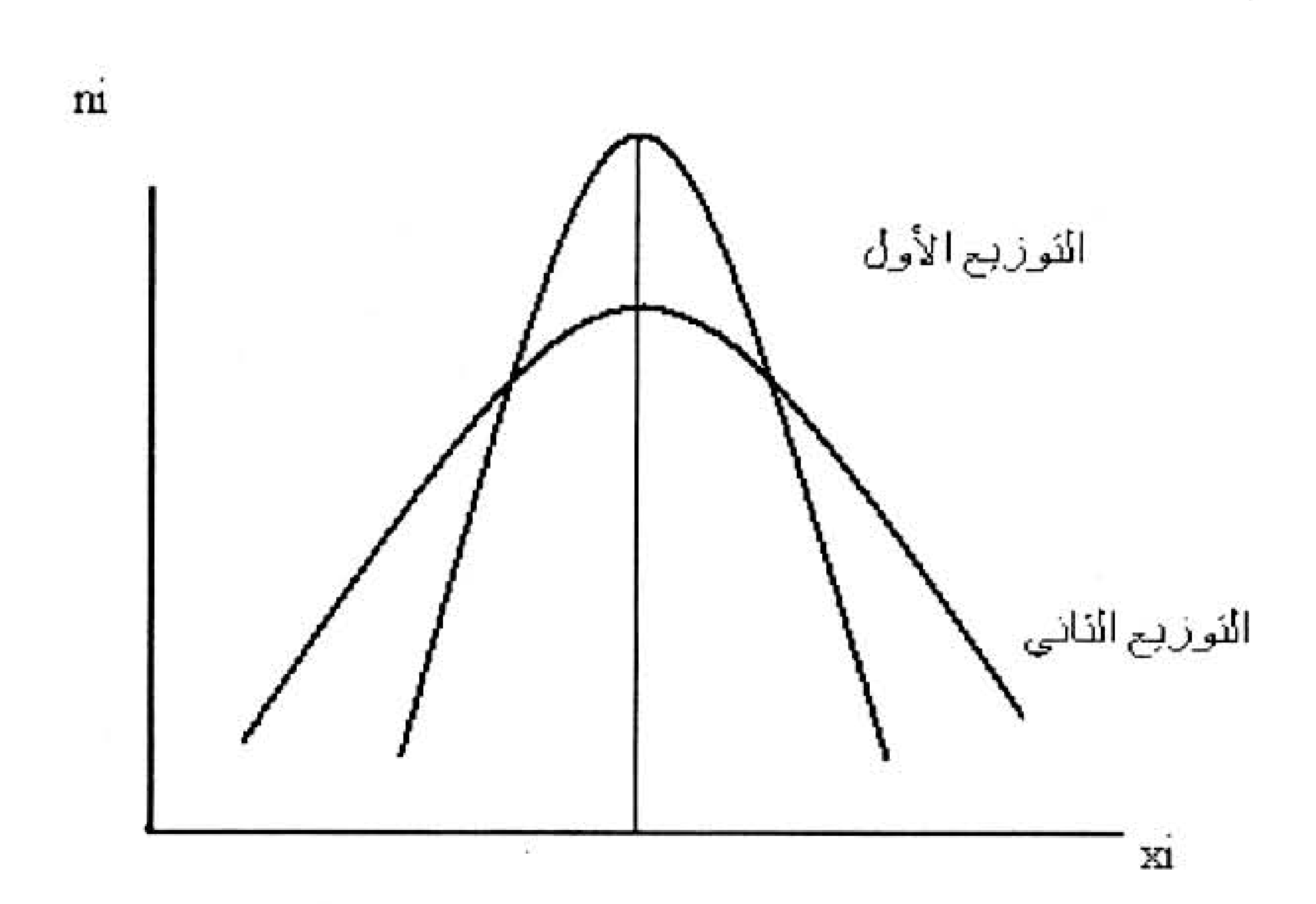
تبين مقاييس النزعة المركزية القيمة المركزية للتوزيع الإحصائي دون أن تظهر كيفية توزيع وانتشار قيم المتغير الإحصائي حول هذه القيمة. نلاحظ مثلا أن التوزيعين التاليين لهما نفس القيمة المركزية، غير أنهما يختلفان اختلافا كبيرا من حيث انتشار وتوزيع قيمهما على مجال الدراسة:

التوزيع الأول: , 72, 71, 71, 70, 70, 70, 69, 68 .

التوزيع الثاني: ، 30,50,50,70,70,70,90,90,110 .

الخصائص الثلاثة للنزعة المركزية متساوية في التوزيعين $\overline{x} = M_0 = M_e$، غير أن طول مجال الدراسة في التوزيعين (المدى العام) يختلف من التوزيع الأول إلى التوزيع الثاني. كما أنه يمكن أن نبين هذه الظاهرة بيانيا:

الشكل 3.1



إن مجال التوزيع الثاني أكبر من مجال التوزيع الأول، معنى ذلك أن التوزيع الثاني أكثر تشتتا من التوزيع الأول بالنسبة للقيمة المركزية. ولقياس هذا التشتت، وحتى تستكمل دراسة التوزيع الإحصائي، نتطرق في هذا الفصل إلى مقاييس عددية تبين لنا كيفية توزيع وانتشار قيم المتغير الإحصائي حول القيمة المركزية، وسنكتفي بالمقاييس الأكثر استعمالا. كما سنتطرق إلى مقاييس أخرى، تبين لنا تناظر أو عدم تناظر التوزيع الإحصائي بالنسبة للقيمة المركزية (مقاييس الشكل).

مقاييس التشتت
Caractéristiques de dispersion

سنتطرق إلى مقاييس التشتت حسب درجة أهميتها، فمن الأقل أهمية إلى الأكثر أهمية.

1- المدى العام:(Etendue ou Range) هو الفرق بين أكبر وأصغر قيمة للتوزيع الإحصائي أو هو عبارة عن الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى. وحسب تعريف هذا المقياس، فإنه لا يأخذ بعين الاعتبار إلا القيمتين المتطرفتين(الأولى والأخيرة)، وبالتالي فإنه يتأثر بالقيم المتطرفة. يتميز المدى العام بأنه يستعمل في المقارنة بين توزيعين إحصائيين أو أكثر وأنه يضم كل الوحدات الإحصائية التي تشكل المجتمع الإحصائي.

مثال: تبين السلسلتان الإحصائيتان التاليتان توزيع مجموعتين من العمال في مؤسستين مختلفتين حسب أجورهم اليومية:

التوزيع الأول:

ج:3.1

رقم العامل	1	2	3	4	5
الأجر اليومي	120	135	140	150	165

التوزيع الثاني:

ج:3.2

رقم العامل	1	2	3	4	5
الأجر اليومي	80	100	140	180	200

نلاحظ أن الوسط الحسابي للتوزيعين متساوٍ $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 140$ فهذا لا يعني أنهما متشابهان، سنرى ذلك من خلال المدى العام ونرمز له بالرمز E: حيث أن المدى العام للتوزيع الأول هو: $E_1 = 165 - 120 = 45$ ، أما المدى العام للتوزيع الثاني هو $E_2 = 200 - 80 = 120$

وبالتالي فإن $E_2 > E_1$ ، إذن التوزيع الثاني أكثر تشتتا من التوزيع الأول، معنى ذلك أن أجور المجموعة الثانية أكثر تباعدا فيما بينها مقارنة

بالمجموعة الأولى، ونستنتج هنا أن المجموعة الأولى أكثر تجانسا وأكثر عدالة في توزيع الأجور من المجموعة الثانية.

2- المدى الربيعي:(Intervalle interquartile) وهو الفرق بين الربيعي الثالث والربيعي الأول $Q_3 - Q_1$، ويرمز له بالرمز $I.Q$.

ويتميز المدى الربيعي بالخصائص التالية:

أ- يضم 50%من المجتمع الإحصائي مهما كان التوزيع الإحصائي.

ب- يتغير طوله مقارنة بالمدى العام حسب طبيعة التوزيع.

ج- استعمالاته محدودة نظرا لبساطته، غير أنه أحسن من المدى العام.

د- يستعمل في المقارنة بين توزيعين إحصائيين أو أكثر.

3- نصف المدى الربيعي: (Le Semi-interquartile) وهوعبارة عن $I.Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ إن الذي يهم في هذا المقياس هو مدلوله الإحصائي، حيث نبينه من خلال المثال التالي:

مثال: تبين السلسلة الإحصائية التالية مداخل 11عائلة، المطلوب حساب نصف المدى الربيعي:

700 ,800 ,900 ,900 ,1000 ,1100 ,1100 ,1200 ,1300 ,1300 ,1400 .

أولا: نحدد قيمة Q1، ولحساب هذه القيمة، نحدد مرتبتها، نلاحظ أن عدد القيم فردي إذن المرتبة هي: $3 = \frac{11+1}{4}$. وبعد ترتيب القيم ترتيبا تصاعديا نجد أن $Q_1 = 900$. وبنفس الطريقة نجد أن $Q_3 = 1300$

ومن ثمة فإن $200 = \frac{1300-900}{2} = \frac{I.Q}{2}$. السؤال المطروح الآن:
ما هو مدلول هذه القيمة؟ يمكن أن نقول أن 50% من المداخل تبعد في المتوسط عن الوسيط بأقل من 200.

4- النسبة بين المدى الربيعي والمدى العام: يبين هذا المقياس تشتت 50% من الوحدات الإحصائية المركزية(أي التي تقع في مركز التوزيع) حول الوسيط مقارنة بالمدى العام. وتكتب علاقة هذا المقياس بالشكل التالي: $\Re = \frac{Q_3 - Q_1}{E} \times 100$، و من مميزاته ما يلي:

أ- يستعمل لقياس تشتت 50%من الوحدات الإحصائية التي تقع حول القيمة المركزية بالنسبة لنفس التوزيع.

ب- إذا كان $\Re = 50\%$ يكون التوزيع الإحصائي متماثل أو متناظر، أما إذا كان هذا المقياس أكبر من 50% فإن التوزيع يكون قوي التشتت بالنسبة للقيمة المركزية، وإذا كان عكس ذلك فإن التوزيع يكون قليل التشتت بالنسبة للقيمة المركزية (الوسيط).

مثال: نفس المثال السابق، ماهي درجة تشتت مداخل 11 عائلة؟

$\Re = \frac{1300-900}{1400-700} \times 100 = 57.14\%$، نلاحظ أن المدى الربيعي يمثل 57.14% من المدى العام و يحتوي على 50% من الوحدات الإحصائية إذن يوجد تشتت نسبي وأقرب إلى التماثل

5- **الانحراف المتوسط (Ecart moyen):** هو البعد المتوسط لقيم المتغير الإحصائي عن قيمة مركزية (الوسط الحسابي). والانحراف هو الفرق بين قيم المتغير الإحصائي والقيمة المركزية $M_e ;M_0 ;\overline{x}$ ويمكن كتابته بالشكل التالي:

$$x_1-\overline{x}\ ;x_2-\overline{x}\ ;.................;x_i-\overline{x}$$

والانحراف المتوسط هو عبارة عن الوسط الحسابي لهذه الفروق، وحسب خاصية من خصائص الوسط الحسابي فإن مجموع هذه الفروق يساوي الصفر، وحتى نتفادى هذا الإشكال، نستعمل هذه الفروق بالقيم المطلقة، إذن تكتب علاقة الانحراف المتوسط بالشكل التالي: $E_{\overline{X}}=\frac{\Sigma\left|x_i-\overline{x}\right|}{N}$ وهي العلاقة البسيطة، أما العلاقة المرجحة أو في حالة توزيع تكراري فهي: $E_{\overline{X}}=\frac{\Sigma n_i\left|x_i-\overline{x}\right|}{\Sigma n_i}$

المثال الأول: لتكن السلسلة الإحصائية التالية:

$$1,2,4,5,7,8,9,10\ ,11\ ,13$$

المطلوب تحديد الانحراف المتوسط؟.

أولا: يتم حساب الوسط الحسابي: $\overline{x}=\frac{70}{10}=7$.

ثانيا: نحدد الفروق:

$$\sum\left|x_i-\overline{x}\right|=6+5+3+2+0+1+2+3+4+6=32.$$

إذن: $E_{\bar{x}} = \frac{32}{10} = 3.2$.

المثال الثاني: ليكن التوزيع التكراري التالي، المطلوب تحديد الانحراف المتوسط؟.

ج:3.3

الفئات	n_i	x_i	$x_i - x_0$	$n_i(x_i - x_0)$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
−99.5 89.5	5	94.5	−30	−150	29.4	147
−109.5 99.5	9	104.5	−20	−80	19.4	174.6
−119.5 109.5	16	114.5	−10	−160	9.4	150.4
−129.5 119.5	25	124.5	0	0	0.6	15
−139.5 129.5	13	134.5	10	130	10.6	137.8
−149.5 139.5	7	144.5	20	140	20.6	144.2
−159.5 149.5	3	154.5	30	90	30.6	91.8
−169.5 159.5	2	164.5	40	80	40.6	81.2
$\sum n_i$	80			−50		942

الحـــل:

1- تحديد الوسط الحسابي: نفرض أن $x_0 = 124.5$

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\Sigma n_i (x_i - x_0)}{\Sigma n_i} = 124.5 + \frac{(-50)}{80} = 123.87$$

2- حساب الانحراف المتوسط:

$$E_{\overline{x}} = \frac{\Sigma n_i \left| x_i - \overline{x} \right|}{\Sigma n_i} = \frac{942}{80} = 11.8$$

ملاحظة: يعتبر الانحراف المتوسط أحسن من سابقيه(المدى العام، المدى الربيعي)، غير أنه لا يستعمل بشكل واسع نظرا لوجود القيمة المطلقة.

6- التباين والانحراف المعياري: (La variance et l'écart-type)

أ- **التباين:** هو عبارة عن الوسط الحسابي لمربعات الفروق بين قيم المتغير الإحصائي والوسط الحسابي. ويرمز له بالرمز $V(x)$، ومن خلال هذا التعريف يمكن أن نستخرج علاقتين:

1- علاقة التعريف:

- في حالة بيانات غير مبوبة: $V(x) = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}{N}$.

- في حالة توزيع تكراري : $V(x)=\frac{\sum n_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum n_i}$.

2- العلاقة الثانية للتباين: انطلاقا من علاقة التعريف، تتحصل على العلاقة التالية:

$$V(x)=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{N}=\frac{\sum(x_i^2-2x_i\cdot\overline{x}+\overline{x}^2)}{N}$$

$$=\frac{\sum x_i^2}{N}-2\overline{x}\cdot\frac{\sum x_i}{N}+\frac{\sum\overline{x}^2}{N}=\frac{\sum x_i^2}{N}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}^2$$

$$V(x)=\frac{\sum x_i^2}{N}-\overline{x}^2$$

- في حالة بيانات غير مبوبة: $V(x)=\frac{\sum x_i^2}{N}-\overline{x}^2$.

- في حالة توزيع تكراري: $V(x)=\frac{\sum n_i\cdot x_i^2}{\sum n_i}-\overline{x}^2$.

ملاحظة: من الأفضل استعمال العلاقة الثانية للتباين لسهولة العمليات الحسابية، وهي عبارة عن الفرق بين مربع الوسط التربيعي ومربع الوسط الحسابي.

ب- الانحراف المعياري: وهو الجذر التربيعي للتباين، ويرمز له بالرمز SD.

- في حالة بيانات غير مبوبة:

$$SD=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N}}$$

- في حالة توزيع تكراري:

$$SD=\sqrt{\frac{\sum n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum n_i}}=\sqrt{\frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{\sum n_i}-\bar{x}^2}$$

7- خصائص الانحراف المعياري: (Propriétés de l'écart-type)

أ- يعتبر الانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت للاعتبارات التالية:

- يستعمل في حساب عدة مؤشرات نذكر منها على وجه الخصوص: معامل الارتباط، في تحديد أشكال التوزيعات الإحصائية والاحتمالية...الخ.
- يستعمل في تحديد نسب عدد الوحدات الإحصائية بالنسبة لتوزيع إحصائي معين يكون قريب إلى التماثل أو التناظر حسب الحالات التالية:

المجال الأول يحتوي على 50% من المجتمع: $\left[\bar{x} \pm 0.67 \times SD\right]$

المجال الثاني يحتوي على 68 % من المجتمع: $\left[\bar{x} \pm SD\right]$.

المجال الثالث يحتوي على 95 % من المجتمع: $\left[\bar{x} \pm 2SD\right]$.

المجال الرابع يحتوي على 99 % من المجتمع: $\left[\bar{x} \pm 3SD\right]$.

ب- يتأثر الانحراف المعياري بالقيم المتطرفة كما هو الحال بالنسبة للوسط الحسابي.

ج- الانحراف المعياري لقيمة ثابتة يساوي الصفر: $V(a)=0$.

د- $V(ax)=a^{2}.V(x)$

هـ- $V(a+x)=V(x)+V(a)=V(x)$.

و- العلاقة بين الانحراف المعياري، الانحراف المتوسط والمدى الربيعي:

لتحديد هذه العلاقة نفرض أن التوزيع الإحصائي المدروس يكون قريب إلى التماثل أو التناظر بالنسبة للقيمة المركزية:

- **العلاقة بين الانحراف المعياري والمدى الربيعي:** نستخرج العلاقة بين هاذين المقياسين انطلاقا من المجالين التاليين $\left[\overline{x} \pm 0.67 \times SD\right]$ و $\left[Q_1 ; Q_3\right]$ الذي يضم كل منهما على 50% من الوحدات الإحصائية المركزية، وبالتالي فإن الحد الأدنى للمجال الأول يساوي الحد الأدنى للمجال الثاني، والحد الأعلى للمجال الأول يساوي الحد الأعلى للمجال الثاني، إذن: $Q_1=\overline{x}-0.67\times SD$ و $Q_3=\overline{x}+0.67\times SD$، ومن هاتين العلاقتين نستنتج أن $Q_3-Q_1=1.34\times SD$.

- **العلاقة بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط:** تعتبر هذه العلاقة تجريبية فكلما كان التوزيع الإحصائي أقرب إلى التناظر والتماثل كلما كانت العلاقة بين المقياسين صحيحة: $E_{\overline{x}}=\frac{4}{5}.SD$

8- معامل الإختلاف: (Coefficient de variation) هو عبارة عن النسبة بين الانحراف المعياري والوسط الحسابي، ويعتبر من مقاييس التشتت النسبية. يستعمل خاصة في المقارنة بين توزيعات إحصائية غير متجانسة (وحدات قياس مختلفة). ويرمز لهذا المقياس بالرمز CV، وتكتب علاقته بالشكل التالي: $CV = \frac{SD}{\overline{x}}$.

مقاييس الشكل

Caractéristiques de forme

إضافة إلى مقاييس الوضع ومقاييس التشتت، سنتطرق إلى مقاييس تبين شكل التوزيع الإحصائي (الالتواء، التطاول والتفلطح) مقارنة بتوزيع مرجعي(التوزيع المتناظر بالنسبة للالتواء والتوزيع الطبيعي بالنسبة للتطاول والتفلطح)، تسمى هذه المقاييس مقاييس الشكل. تعتمد هذه الأخيرة على العزوم البسيطة والعزوم المركزية.

1- العزوم البسيطة: (Les Moments simples)

لتكن $x_1^K; x_2^K; x_3^K; \ldots\ldots; x_n^K$، العزم البسيط من المرتبة K هو عبارة الوسط الحسابي لقيم المتغير الإحصائي مرفوعة إلى القوة K.

ويكتب بالشكل التالي:

- في حالة بيانات غير مبوبة: $m_K = \frac{\Sigma x_i^K}{n}$.

- في حالة بيانات مبوبة أو توزيع تكراري: $m_K = \frac{\sum_i n_i \cdot x_i^K}{\Sigma n_i}$.

إن مراتب العزوم البسيطة تتراوح من 0 إلى K، وهذه بعض الحالات الخاصة:

$$m_0 = 1; m_1 = \overline{x} ; m_2 = Q^2 ; m_3 = \frac{\Sigma x_i^3}{n} ....$$

2- العزوم المركزية:(Les Moments centrés)

تكتب العلاقة العامة للعزوم بالشكل التالي: $m_K = \frac{\sum_i n_i \cdot (x_i - x_0)^K}{\sum_i n_i}$.

عندما $x_0 = 0$ فإننا نكون في حالة عزوم بسيطة، أما عندما $x_0 = \overline{x}$ فهذه الحالة تنطبق على العزوم المركزية، ويرمز لها بالرمز μ:

- في حالة بيانات غير مبوبة: $\mu_K = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})^K}{n}$.

- في حالة بيانات مبوبة أو توزيع تكراري: $\mu_K = \frac{\sum_i n_i \cdot (x_i - \overline{x})^K}{\sum_i n_i}$.

تتراوح مراتب العزوم المركزية من 0 إلى K، و هذه بعض الحالات الخاصة:

$$\mu_0 = 1; \mu_1 = 0; \mu_2 = V(x) .$$

3- العلاقة بين العزوم المركزية والبسيطة:

لإيجاد العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم البسيطة نقوم بنشر ثنائي نيوتن للمقدار:

$$\mu_K = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \overline{x})^K =$$

أو:

$$\mu_K = \sum\{(-1)^K . C_n^K \cdot x_i^{n-K} \cdot \overline{x}^K\}$$

نكتفي بالعزوم المركزية الخمسة الأولى بدلالة العزوم البسيطة:

$$K = 0 \Rightarrow \mu_0 = 1$$

$$K = 1 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

$$K = 2 \Rightarrow \mu_2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = m_2 - m_1^2$$

$$K = 3 \Rightarrow \mu_3 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^3}{N} = m_3 - 3 \cdot m_1 \cdot m_2 + 2 \cdot m_1^3$$

$$K = 4 \Rightarrow \mu_4 = m_4 - 4\, m_1 \cdot m_3 + 6\, m_1^2 \cdot m_2 - 3\, m_1^4$$

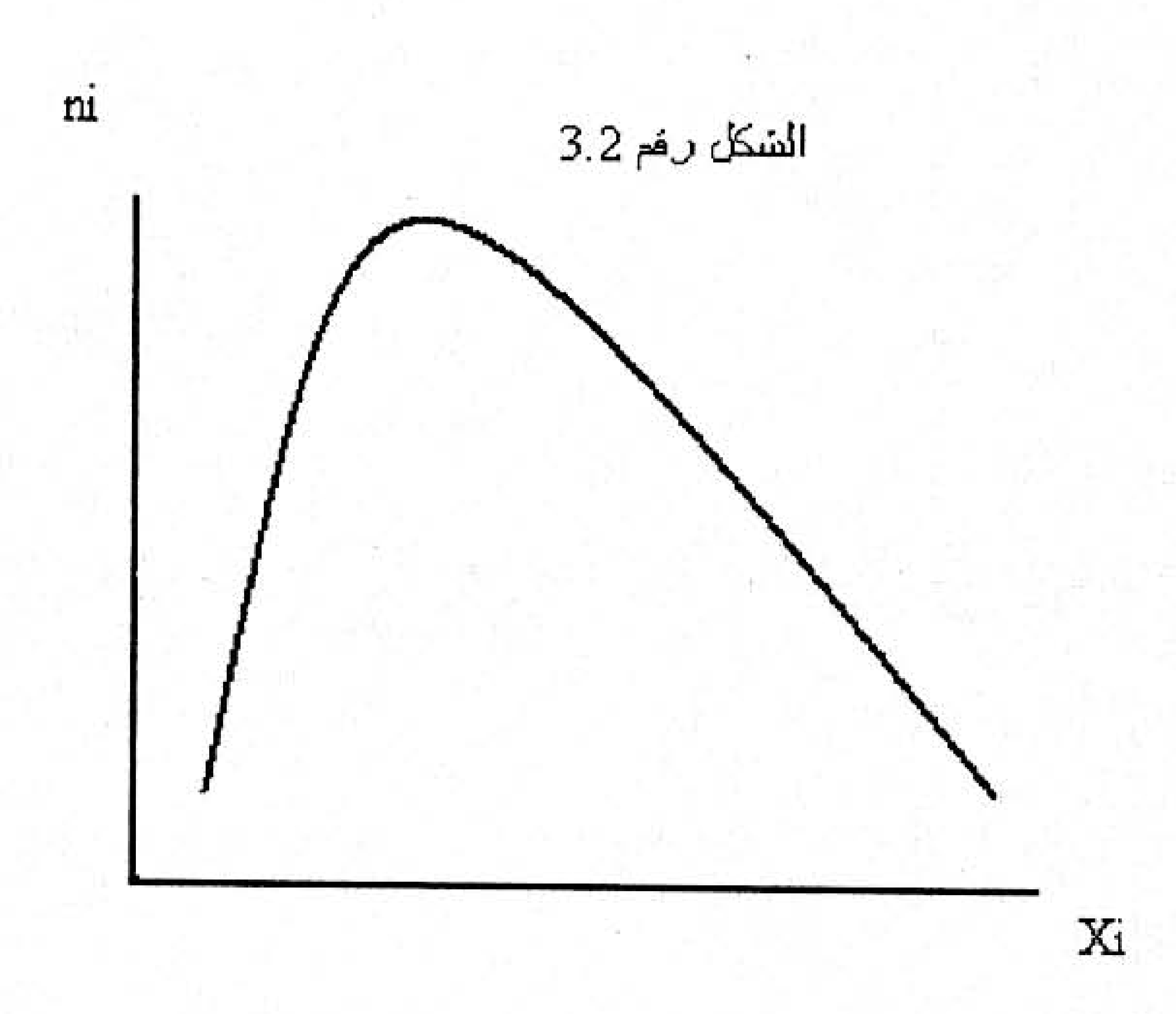
4- تحديد شكل التوزيع:

يحدد شكل التوزيع التكراري بالنسبة للقيمة المركزية(الوسط الحسابي أو الوسيط)، و يمكن أن نميز بين نوعين من أشكال التوزيعات الإحصائية:

النوع الأول:

يخص هذا النوع من الأشكال التوزيعات الإحصائية غير المتناظرة من اليسار أو من اليمين (dissymétrie à gauche ou à droite) مقارنة بتوزيع متناظر بالنسبة للقيمة المركزية:

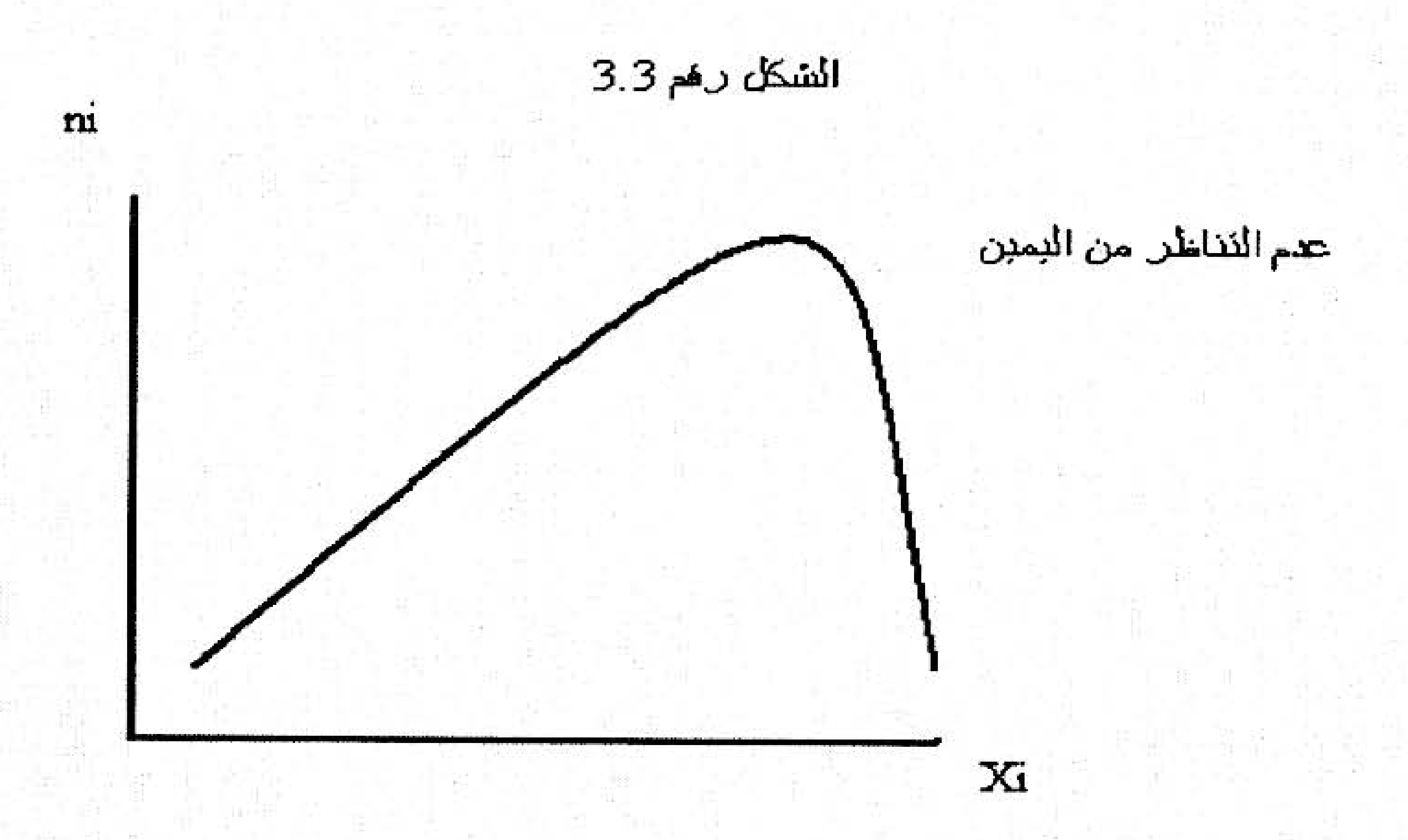
أ- عدم تناظر من اليسار:



الشكل رقم 3.2

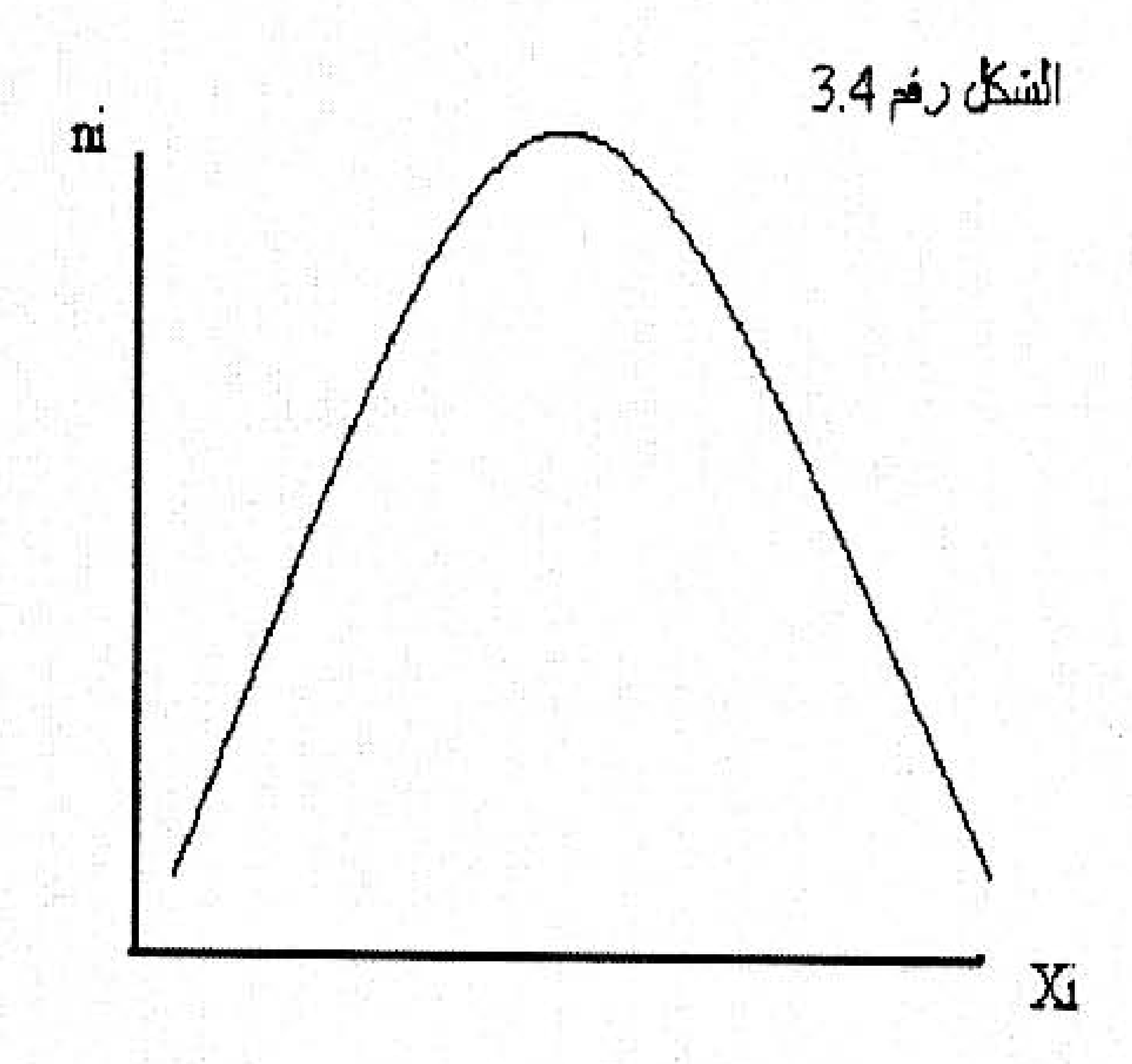
ب-عدم تناظر من اليمين:

الشكل رقم 3.3



ج- توزيع متناظر:

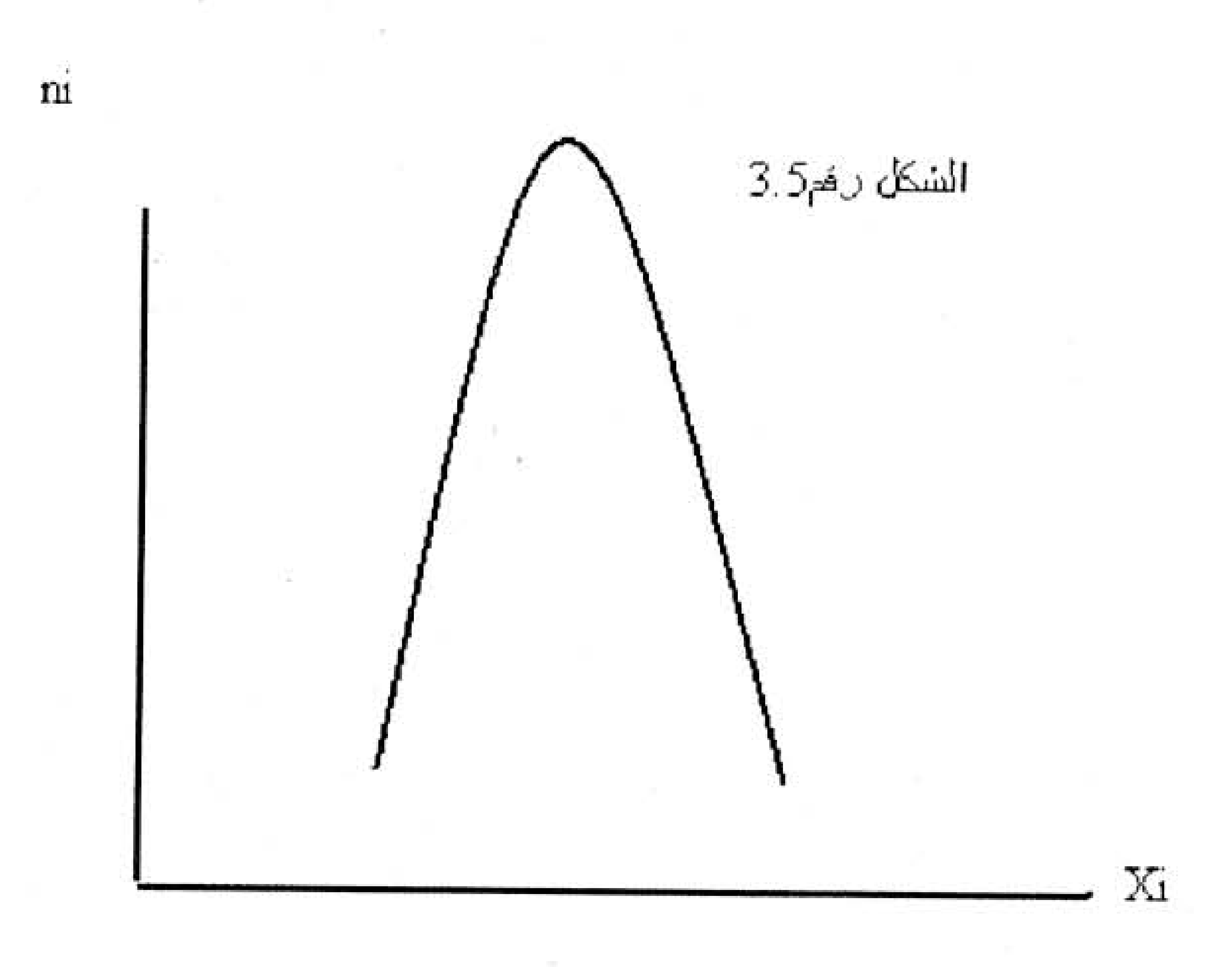
الشكل رقم 3.4



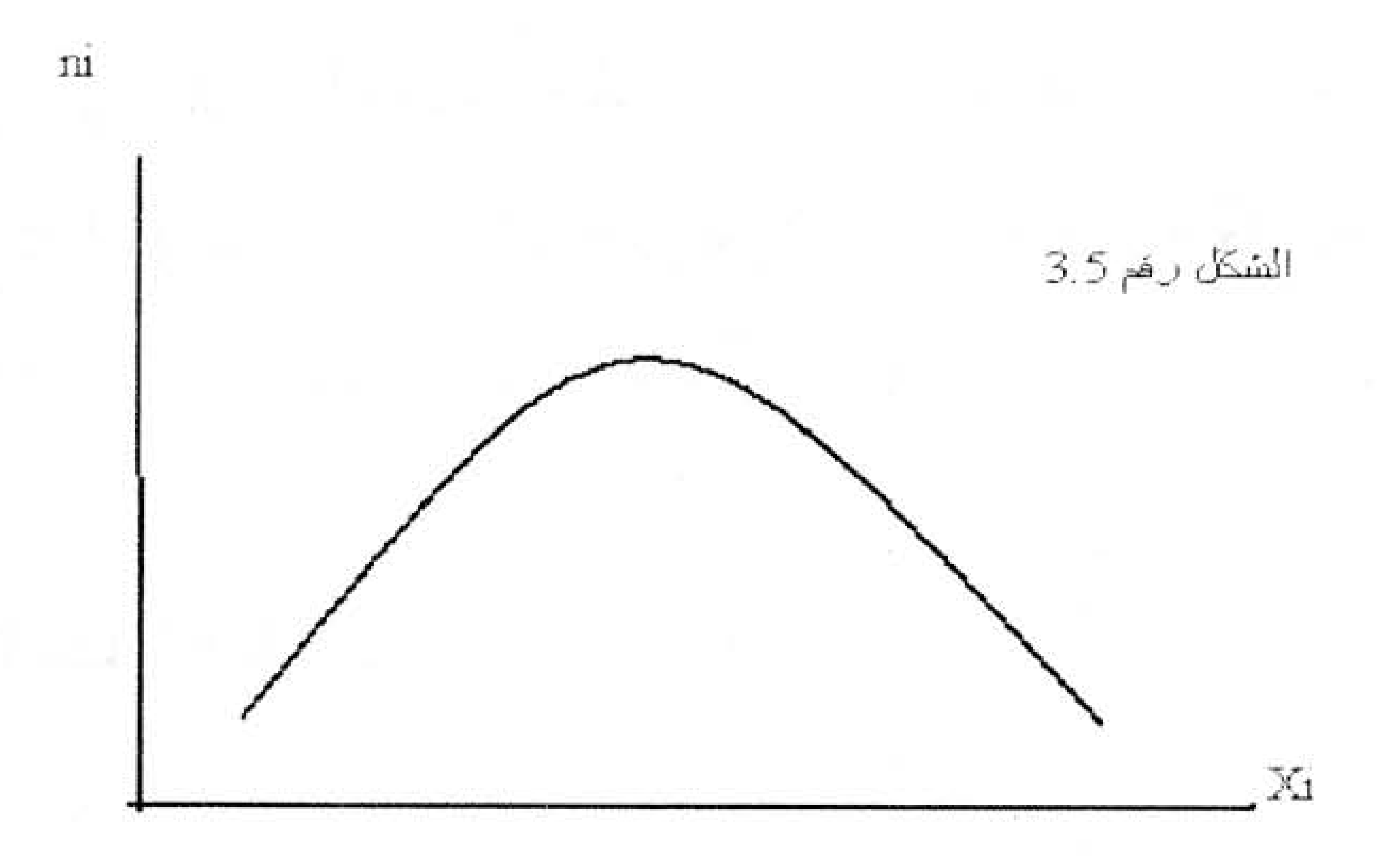
النوع الثاني:

يخص هذا النوع من الأشكال التوزيعات الإحصائية المتناظرة والتي تكون في نفس الوقت متطاولة (leptocurtique) أو متفلطحة (platicurtique) مقارنة بالشكل الجرسي أو بما يسمى بالتوزيع الطبيعي (mésocurtique)، وذلك حسب الأشكال التالية:

أ- **توزيع متطاول:** (ذو تشتت ضعيف)



ب- توزيع متفلطح (ذو تشتت قوي):



الشكل رقم 3.5

إن الفرق الأساسي بين هذه التوزيعات يتمثل في درجة قوة التشتت، ففي التوزيع المتفلطح يكون التشتت قوي بالنسبة للقيمة المركزية (الوسط الحسابي)، أما بالنسبة للتوزيع المتطاول فالتشتت يكون ضعيفا بالنسبة للوسط الحسابي.

5- مقاييس تحديد شكل التوزيع الإحصائي:

أ- النوع الأول:

1- معامل فيشر:(Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), England)

يقيس هذا المعامل درجة التواء شكل التوزيع الإحصائي، ونعتمد في ذلك على قيمة العزم المركزي من المرتبة الثالثة، ولاستبعاد وحدة القياس، نقسمه على الانحراف المعياري من نفس المرتبة، يرمز لمعامل فيشر للنوع الأول بالرمز F1 وتكتب علاقته بالشكل التالي: $F_1 = \frac{\mu_3}{SD^3}$.

سؤال: لماذا نعتمد على العزم المركزي من المرتبة الثالثة؟

نعتمد على العزم المركزي من المرتبة الثالثة لأن قيمته في حالة توزيع متناظر تساوي إلى الصفر، وبناءا على هذه القيمة، نضع الحالات الممكنة التالية:

الحالة الأولى: توزيع إحصائي متناظر $F_1 = 0 \Rightarrow$.

الحالة الثانية: عدم تناظر من اليمين <= $0 < F_1 > 0$، قيم x_i التي تكون أكبر من $\overline{x}$ يكون عددها أكبر من عدد القيم التي تكون أصغر من $\overline{x}$. معنى ذلك أن العلاقة بين المقاييس الثلاثة للنزعة المركزية تكون بالشكل التالي: $\overline{x} > M_e > M_0$.

الحالة الثالثة: عدم تناظر من اليسار <= $0 > F_1 < 0$، أي أن عدد قيم x_i التي تتجاوز $\overline{x}$ تكون أقل من عدد القيم التي تكون أصغر من $\overline{x}$.

ملاحظة:

أ- لا يوجد حد أدنى أو أعلى لقيم F_1، غير أنه من أجل توزيع إحصائي ضعيف الالتواء تكون: $F_1 \in [-2;+2]$.

ب- يستعمل، في بعض الحالات، المقدار $\frac{F_1}{2}$ لقياس الالتواء وذلك لأن $\frac{F_1}{2} = \frac{\overline{x} - M_0}{SD}$.

ج- تكون العلاقة التالية صحيحة $\overline{x} - M_0 = 3(\overline{x} - M_e)$ في حالة توزيع ضعيف الالتواء.

2- معامل بارسون:(Karl Pearson) (ظهرت أعماله بين سنة1890 و1920 في بريطانيا) وهو عبارة عن النسبة بين مربع العزم المركزي من المرتبة الثالثة ومكعب العزم المركزي من المرتبة الثانية، ويرمز له

بالرمز P_1: $P_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$، ولقد تم اختيار العزم المركزي من المرتبة الثالثة لقياس الالتواء لأن قيمته تساوي الصفر في حالة توزيع متناظر.

أما بالنسبة للحالات الممكنة لهذا المعامل فإنها نفس الحالات الثلاثة لمعامل فيشر.

3- معامل يول و كاندال: (Yule & Kendall)

يستعمل هذا المعامل في حالة جداول مفتوحة، يرمز له بالرمز $C_{Y.K}$ وهو عبارة عن النسبة

التالية: $C_{Y.K} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$

الحالات الممكنة:

1- توزيع متناظر $C_{YK} = 0$.
2- التواء سالب $C_{YK} < 0$.
3- التواء موجب $C_{YK} > 0$.

ب- مقاييس تحديد شكل النوع الثاني:

تستعمل هذه المقاييس في حالة توزيعات متناظرة، وذلك لتحديد مدى تطاولها أو تفلطحها مقارنة مع التوزيع الطبيعي، حيث يعتمد كل من **فيشر و بارسون** على العزم المركزي من المرتبة الرابعة.

1- معامل بارسون(Karl Pearson):

وهو عبارة عن النسبة بين العزم المركزي من المرتبة الرابعة ومربع العزم المركزي من المرتبة الثانية.

سؤال: لماذا يعتمد كل من فيشر وبارسون على العزم المركزي من المرتبة الرابعة؟ لأن العزم المركزي من المرتبة الرابعة يساوي 3 في حالة توزيع طبيعي أي توزيع على شكل جرسي، و يرمز لهذا المعامل بالرمز P_2، والعلاقة الإحصائية له هي كالتالي:

$$P_2 = \frac{\mu_4}{SD^4}.$$

ويمكن دراسة هذا المعامل حسب الحالات التالية:

الحالة الأولى: توزيع طبيعي أو على شكل جرسي <= $P_2 = 3$.

الحالة الثانية: توزيع متطاول (تشتت ضعيف بالنسبة لمركز التوزيع) <= $P_2 > 3$.

الحالة الثالثة: توزيع متفلطح (تشتت قوي بالنسبة لمركز التوزيع) <= $P_2 < 3$.

2- معامل Fisher:

وهو عبارة عن معامل Pearson مطروحا منه 3، ويرمز له بالرمز F_2، وتكتب علاقته بالشكل التالي: $F_2 = P_2 - 3$، حيث يدرس حسب الحالات السابقة.

تمارين تطبيقية محلولة للفصل الثالث

التمرين العاشر:

يبين التوزيع التكراري التالي نتائج الدراسة التي قامت بها مصلحة متابعة الجودة لمؤسسة صناعة المصابيح الكهربائية عل عينة حجمها 50 مصباحا حسب مدة الاستعمال:

ج:3.4

الفئات	n_i	X_i
100−500	2	300
500−800	4	650
800−900	6	850
900−1000	18	950
1000−1100	15	1050
1100−1500	5	1300
$\sum n_i$	50	

المطلوب ما يلي:

1- حدد شكل التوزيع باستعمال مقاييس النزعة المركزية الثلاثة؟.

2- أحسب الانحراف المتوسط و المعياري؟.

3- حدد النسبة التي يحتويها المجال $\left[\overline{X} \pm SD\right]$ ؟.

التمرين الحادي عشر:

أرادت مؤسسة ما استيراد نوعا معينا من المصابيح الكهربائية، وأن لديها الاختيار بين ثلاثة أنواع، معتمدة في ذلك على الجودة.

وبعد إجراء الاختبارات الضرورية على عينة من طل نوع، تحصلت على النتائج التالية: (الفئات = مدة الاستعمال)

النوع الأول:

ج:3.5

الفئات	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21
n_i	2	4	8	12	17	6	1

النوع الثاني:

ج:3.6

الفئات	0-3	3-5	5-10	10-15	15-18	18-21
n_i	1	2	7	20	15	5

النوع الثالث:

ج:3.7

الفئات	0-5	5-10	10-12	12-16	16-18	18-21
n_i	3	5	6	23	10	3

المطلوب ما يلي:

1- ما هو عدد المصابيح التي لديها مدة استعمال أقل من 16، لكل نوع من الأنواع الثلاثة؟.

2- ما هي مدة الاستعمال الأكثر تكرارا لكل نوع من الأنواع الثلاثة؟.

3- ما هي مدة الاستعمال الوسيطية، لكل نوع من الأنواع الثلاثة؟.

4- ما هو النوع الذي يجب استيراده، باستخدام مقياس من مقاييس التشتت؟.

التمرين الثاني عشر:

يبين التوزيع التكراري التالي توزيع المداخيل النسبية لمجتمع ما

ج:3.8

الفئات	%
X_i 10>	17.2
10-20	11.7
20-30	12.1
30-40	14.8
40-50	15.9
50-60	11.9
60-70	5
70-80	4
80-90	3.7
$\geq 90\ X_i$	3.6

المطلوب ما يلي:

1- هل يمكن تحديد SD لهذا التوزيع و لماذا؟.

2- ما هو مقياس التشتت المناسب؟ أحسبه؟.

3- حدد حدود المجال التالي: $\left[P_{19};P_{80}\right]$ ؟.

4- حدد حدود ونسبة المجال التالي: $\left[\overline{X}\pm 0.67.SD\right]$ ؟.

5- أدرس شكل هذا التوزيع باستعمال مقياس فيشر؟.

التمرين الثالث عشر:

لتكن السلسلتان الإحصائيتان التاليتان A;B :

A : 5 ;18 ;10 ;15 ;3 ;7 ;6 ;12.

B :18 ;9 ;8 ;9 ;8 ;8 ;3 ;9.

المطلوب ما يلي:

1- حدد الوسيط والمنوال لهاتين السلسلتين؟.

2- هل يمكن استعمال المدى العام للمقارنة بين السلسلتين؟.

3- ما هو مقياس التشتت المناسب في المقارنة بين السلسلتين؟.

التمرين الرابع عشر:

يبين الجدول التكراري التالي توزيع 100 طالب حسب علاماتهم في مقياسي الإحصاء والمنهجية:

ج:3.9

X_i	2	4	5	7	9	10	11	13	14	15	16	$\sum n_i$
$n_i 1$	1	3	6	8	14	20	25	18	2	2	1	100
$n_i 2$	2	3	5	7	10	15	20	22	10	5	1	100

المطلوب ما يلي:

1- أحسب معامل الاختلاف في الحالتين ماذا تلاحظ؟.

2- أحسب معامل التغير الربيعي في الحالتين؟.

3- قارن تشتت العلامات في الحالتين بناءا على السؤالين 1و2؟.

4- قارن شكل التوزيعين باستعمال معامل بارسون؟.

التمرين الخامس عشر:

درست علامات مجموعتين من الطلبة الناجحين في كل من معهد الاقتصاد والحقوق فكانت النتائج كالتالي:

أ- في معهد الاقتصاد: الوسط الحسابي للمعادلات يساوي 13، والحد الأدنى والأقصى لهذه المعدلات هو على التوالي 17،12.

ب- في معهد الحقوق: الوسط الحسابي للمعدلات يساوي 14، والحد الأدنى والأعلى لهذه المعدلات هو على التوالي 16،11.

المطلوب ما يلي: باستعمال مقياس تشتت مناسب، حدد المجموعة الأكثر تجانسا؟.

التمرين السادس عشر:

أجب على الأسئلة النظرية التالية باختصار:

1- متى تستخدم مقاييس التشتت المطلقة والنسبية؟.

2- ما هو الفرق بين المدى العام والمدى الربيعي؟.

3- إذا كان $\overline{X} = Mo = Me$ لتوزيعين تكراريين فهل هذا يعني أنهما متشابهان بين ذلك؟.

4- متى يستعمل كل من الوسط الحسابي، الوسط الهندسي والوسط التوافقي؟.

5- ما هو دور كل من مقاييس النزعة المركزية والتشتت والشكل، وما هو الفرق بينهم؟.

التمرين السابع عشر:

بين صحة العلاقة التالية، علما أن التوزيع الإحصائي المدروس متناظر:

$$.\ \Delta_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta_1 + \Delta_2\right)$$

التمرين الثامن عشر:

يبين الجدول التكراري التالي توزيع 65 عاملا حسب أجورهم اليومية: المطلوب ما يلي:

1- ما هو الأجر المتوسط؟.

2- قس تشتت هذا التوزيع باستعمال مقياس مناسب؟.

3- قس إلتواء هذا التوزيع باستعمال مقياس ملائم؟.

4- وضح لماذا لا يعد الانحراف المعياري مقياسا ملائما للتشتت؟.

ج:3.10

الفئات	%
$<60\ X_i$	12.3
60-70	15.38
70-80	24.61
80-90	21.53
90-100	15.38
100-110	7.69
$\geq 110\ X_i$	3.07

5- إذا فرضنا أن طول كل من الفئة الأولى والأخيرة يساوي 10، فقارن بين النسبة النظرية والنسبة التجريبية للمجال التالي: $\left[\overline{X} \pm SD\right]$؟.

حل تمارين الفصل الثالث

التمرين العاشر:

1- نستعمل مقاييس النزعة المركزية الثلاثة لتحديد شكل التوزيع الإحصائي المركزية ونحدد أولا هذه المقاييس انطلاقا من جدول الحسابات التالي:

ج:3.11

ت.ت. ص	E_r	$n_i(X_i - X_0)$	X_i^2	$n_i.X_i^2$	$\lvert Xi-\overline{X}\rvert$	$\lvert Xi-\overline{X}\rvert n_i$
2	$2/4$	-26	90	18	653	1306
6	$4/3$	-24	422.5	169	303	1212
12	6	-12	722.5	433.5	103	618
30	18	0	902.5	1624.5	3	54
45	15	30	1102.5	1653.75	97	1455
50	$5/4$	35	1690	845	347	1735
		3		4743.75		6380

أ- تحديد الوسط الحسابي باستعمال الوسط الفرضي:

$$\overline{X} = X_0 + \frac{\Sigma n_i\left(\frac{X_i - X_0}{K}\right)}{\Sigma n_i}.$$

ب- تحديد المنوال: لحساب المنوال، نعدل التكرارات لأن الفئات غير متساوية:

$$. M_e = 900 + \frac{12}{12+3}.100 = 980$$

ج-تحديد الوسيط: بإتباع خطوات حساب الوسيط نتحصل على ما يلي:

$$. M_e = 900 + \frac{(25-12)}{18}.100 = 972.22$$

نلاحظ أن $Mo > Me > \overline{X}$:إلتواء سالب.

2- تحديد الانحراف المتوسط:

$$. E_{\overline{X}} = \frac{\sum ni/Xi - \overline{X}/}{\sum ni} = \frac{6380}{50} = 127.6$$

3- تحديد الانحراف المعياري:

$$V(X) = \frac{\sum n_i.X_i^2}{\sum n_i} - \overline{X}^2 = \frac{4743.75 \times 10^4}{50} - 908209$$

$$V(X) = 40541 \Rightarrow SD = 201.34$$

4- تحديد النسبة التي يحتويها المجال $\left[\overline{X} \pm SD\right]$:

[953-201.34;953+201.34]=[752;1154]

لتحديد النسبة التي يحتويها هذا المجال، ننطلق من الفئة الثانية حيث أن 752 تقع بين 500 و800، ونلاحظ أنه من 500 إلى800 لدينا تكرار يساوي4 أما من 752 إلى 800 فيوجد X باستعمال القاعدة الثلاثية ونفرض أن التكرارات تتوزع بشكل منتظم داخل المجال، نجد أن عدد

التكرارات بين القيمتين 752 و 800 تساوي إلى 0.64 حيث نقرب هذه القيمة إلى 1، أما تكرارات الفئات الثالثة والرابعة والخامسة فتقع كلها في المجال المدروس، أما المجال الجزئي من الفئة السادسة، نطبق عليه القاعدة الثلاثية بنفس طريقة المجال الجزئي للفئة الثانية، ونتحصل على التكرارات التالية للمجال المدروس: 1+6+18+15+1=41، أما النسبة فهي: $\left(\frac{41}{50}\right)\cdot 100=82\%$، نلاحظ أن هذه النسبة بعيدة بشكل كبير عن النسبة النظرية والتي تساوي 68%، نستنتج أن التوزيع غير متناظر.

التمرين الحادي عشر:

1- عدد المصابيح التي لها مدة استعمال أقل من 16 وحدة زمنية:

- النوع الأول: تكرارات الفئات الخمسة الأولى+ عدد الوحدات المحصورة بين 15و16، وهذا باستعمال القاعدة الثلاثية كما رأينا في التمرين السابق، وبالتالي فإن عدد هذه المصابيح هو:

$$2+4+8+12+17+2=45$$

- النوع الثاني: بنفس الطريقة، نجد أن عدد هذه المصابيح هو:

$$1+2+7+20+5=35$$

- النوع الثالث: عدد المصابيح هو: 3+5+6+23=37

2- مدة الاستعمال الأكثر انتشارا وتكرارا هي: المنوال.

- النوع الأول: نلاحظ أن أطول الفئات متساوية، وبالتالي فإن الفئة المنوالية: [12-15[، والمنوال هو:

$$. M_0 = 12 + \frac{5}{5+11} .3 = 12.937$$

- النوع الثاني: نلاحظ أن أطول الفئات غير متساوية، إذن يجب تعديل التكرارات من أجل حساب المنوال:

K_i	3	2	5	5	3	3
E_r	$1/3$	1	1.4	4	5	$5/3$

بعد تعديل التكرارات، أصبحت الفئة المنوالية الفئة الخامسة بدلا من الفئة الرابعة:[15-18[، والمنوال هو: $. M_0 = 15 + \frac{1}{1+10/3} .3 = 15.69$

- النوع الثالث: نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية كذلك، إذن نعدل التكرارات:

K_i	5	5	2	4	2	3
E_r	$3/5$	1	3	5.75	5	1

الفئة المنوالية هي: [12-16] (أي الفئة التي تقابل أكبر تكرار معدل)،
إذن قيمة المنوال هي كالتالي: $M_0 = 12 + (2.75/3.5).4 = 15.14$.

3- مدة الاستعمال الوسيطية: يتعلق الأمر هنا بتحديد الوسيط:

- **النوع الأول:**

أولا- نحدد التكرار التجميعي الصاعد:

ت.ت.ص	2	6	14	26	43	49	50

ثانيا- ترتيب الوسيط: $\frac{\sum ni}{2} = \frac{50}{2} = 25$.

ثالثا- الفئة الوسيطية: هي الفئة التي تقابل التكرار التجميعي الصاعد الذي يساوي ترتيب الوسيط أو الأكبر منه مباشرة، وهي الفئة الرابعة:[9-12].

رابعا- قيمة الوسيط: $M_e = 9 + \frac{[25-14]}{12}.3 = 11.75$.

بنفس الطريقة نحدد قيمة الوسيط للنوع الثاني والثالث:

- **النوع الثاني:** $M_e = 10 + (15/20).5 = 13.75$.

- **النوع الثالث:** $M_e = 12 + (11/23).4 = 13.91$.

4- تحديد عدد المصابيح التي تقع في المجال [11-19] بالنسبة لكل نوع:

- **النوع الأول:** لتحديد هذا العدد، نحدد موضع طرفي المجال المدروس بين فئات التوزيع التكراري، فالفئات، التي تقع بكاملها داخل المجال

تحسب تكراراتها كاملة أما الفئات التي يقع جزء منها داخل هذا المجال، نطبق عليها القاعدة الثلاثية (كما رأينا في التمرين السابق) إذن عدد المصابيح في المجال السابق هي كالتالي:

- **النوع الأول:** 17+6+4=27.
- **النوع الثاني:** بنفس الطريقة، نجد أن عدد المصابيح هو:

$.15+16+1.66 \cong 33$

- **النوع الثالث:** عدد المصابيح هو: 23+10+1+3=37.

5- نوع المصابيح التي يجب استيرادها من طرف المؤسسة هي تلك التي يكون تشتتها ضعيفا مقارنة بالقيمة المركزية (الوسط الحسابي)، ولتحديد ذلك نستعمل معامل الاختلاف مثلا، ثم مقارنته بالنسبة لكل نوع، فأصغر معامل اختلاف يقابل أحسن نوع، أي كلما كان الانحراف المعياري صغيرا بالنسبة للوسط الحسابي كلما كان النوع جيدا، وهو النوع الذي يجب استيراده.

إذن نقوم بتحديد معامل الاختلاف لكل نوع:

- **النوع الأول:** معامل الاختلاف هو عبارة عن النسبة بين الانحراف المعياري والوسط الحسابي، وجدول الحسابات التالي يحتوي على مختلف العمليات الحسابية:

X_i	$\frac{X_i - X_0}{3}$	$n_i\left(\frac{X_i - X_0}{3}\right)$	X_i^2	$n_i.X_i^2$
1.5	-3	-6	2.25	4.5
4.5	-2	-8	20.25	81
7.5	-1	-8	56.25	450
10.5	0	0	110.25	1323
13.5	1	17	182.25	3098.25
16.5	2	12	272.25	1633.5
19.5	3	3	380.5	380.5
		10		6970.5

أ- **تحديد الوسط الحسابي:** نستعمل الطريقة المختصرة حيث نقسم الفروق $(x_i - x_0)$ على طول الفئة ونفرض أن الوسط الفرضي يساوي 10.5 إذن:

$$\overline{x} = 10.5 + \frac{10}{50} \times 3 = 11.1$$

ب- **الانحراف المعياري:**

$$SD = \sqrt{\frac{\sum ni.x_i^2}{\sum ni} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{6970.5}{50} - 123.21}$$

$$= \sqrt{16.2} = 4.0249$$

ج- **تحديد معامل الاختلاف:** $C.V = \frac{SD}{\overline{x}} = \frac{4.0249}{11.1} = 0.3626$

– تحديد معامل الاختلاف للنوع الثاني: بنفس الطريقة السابقة نحدد هذا المعامل، اعتمادا على جدول الحسابات التالي:

ج:3.12

x_i	$(x_i - x_0)$	$n_i(x_i - x_0)$	x_i^2	$n_i \cdot x_i^2$
1.5	−11	−11	2.25	2.25
4	−8.5	−17	16	32
7.5	−5	−35	56.25	393.75
12.5	0	0	156.25	3125
16.5	4	60	272.25	4083.75
19.5	7	35	380.25	1901.25
		32		9538

$$\bar{x} = 12.5 + \frac{32}{50} = 13.14$$

معامل الاختلاف:

$$SD = \sqrt{\frac{9538}{50} - 172.659} = \sqrt{18.101} = 4.2545$$

$$CV = \frac{SD}{\bar{x}} = \frac{4.2545}{13.14} = 0.3237$$

– النوع الثالث: بنفس الطريقة، نحدد معامل الاختلاف حسب الجدول التالي:

ج:3.13

x_i	$(x_i - x_0)$	$n_i(x_i - x_0)$	x_i^2	$n_i \cdot x_i^2$
2.5	−11.5	−34.5	6.25	18.75
7.5	−6.5	32.5	56.25	281.25
11	−3	−18	121	726
14	0	0	196	4508
17	3	30	289	2890
19.5	5.5	16.5	380.25	1140.75
		−38.5		9564.75

$$\overline{x} = 14 + \frac{(-38.5)}{50} = 13.23$$

- معامل الاختلاف: $SD = \sqrt{\frac{9564.75}{50} - 175.03} = \sqrt{16.26} = 4.032$

$$CV = \frac{SD}{\overline{x}} = \frac{4.032}{13.23} = 0.3047$$

النوع الواجب استراده: نقارن بين معاملات الاختلاف:

$CV_3 < CV_2 < CV_1$ إذن نلاحظ أن أصغر معامل اختلاف هو معامل الاختلاف للنوع الثالث، و بالتالي فالنوع الثالث هو الذي يجب استراده.

التمرين الثاني عشر:

1- لا نستطيع حساب تباين هذا التوزيع لأن الجدول التكراري مفتوح من الأعلى ومن الأسفل، حيث لا يمكن تحديد مركز الفئة الأولى

والأخيرة، ولكن إذا كان طول الفئة ثابت، يمكن أن نفرض أن طول الفئة الأولى والأخيرة هو طول الفئة الثابت.

2- مقياس التشتت المناسب هو المدى الربيعي لأنه لا يأخذ بعين الاعتبار الفئة الأولى و الأخيرة، ولحسابه نضع أولا النسبة المئوية المتجمعة الصاعدة:

ت.ت.ص	17.2	28.9	41	55.8	71.7	83.6	92.6	96.3	100

أ- حساب الربيعي الأول:

- ترتيبه: 25%
- فئته هي: $[1000-2000[$
- قيمته هي: $Q_1=1000+\frac{[25-17.2].1000}{11.7}=1666.66$.

ب- حساب الربيعي الثالث:

- ترتيبه: 75%
- فئته هي: $[5000-6000[$
- قيمته هي: $Q_3=5000+\frac{[75-71.7].1000}{11.9}=5277.31$.

لقياس تشتت هذا التوزيع نستعمل النسبة بين المدى الربيعي والمدى العام:

$$\frac{Q_3-Q_1}{E}.100=\frac{5277.31-166666}{10000}.100=36.10\%$$ ، نستنتج وجود تشتت ضعيف لأنه أقل من 50%.

3- تحديد حدود المجال $\left[P_{19} - P_{80}\right[$

أ- حساب المئيني التاسع عشر:

- ترتيبه هو: 19%

- فئته هي: $\left]1000 - 2000\right[$

- قيمته هي: $P_{19} = 1000 + \frac{[19-17.2].1000}{11.7} = 1153.846$.

ب- حساب المئيني الثمانين:

- ترتيبه هو: 80%

- فئته هي: $\left]5000 - 6000\right[$

- قيمته هي: $P_{80} = 5000 + \frac{[80-71.7].1000}{11.9} = 5697.478$.

حدود المجال هي: $\left[1153.846 - 5697.478\right]$

4- تحديد حدود ونسبة المجال: $\left[\overline{x} \pm 0.67 \times SD\right]$: لا يمكن تحديد حدود هذا المجال إلا بعد غلق الجدول من الأعلى و من الأسفل، إذن طول الفئة الأولى والأخيرة يساوي 1000.

أ- حساب الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي:

$$\overline{x} = 4500 + \frac{(-76200)}{100} = 3738$$

ب- حساب الانحراف المعياري: $SD = 2450.939$.

إذن حدود المجال هي: $\left[3738 \pm 0.67 \times 2450.939\right]$ أي أن:

$\left[2104.04 - 5371.95\right]$.

النسبة التي يحتويها هذا المجال هي: 45.966% (النسبة التجريبية)، بينما النسبة النظرية في حالة توزيع طبيعي هي 50% أي أن التوزيع المدروس قريب نوعا ما من التوزيع ذي الشكل الجرسي.

5- دراسة شكل التوزيع باستعمال مقياس فيشر:

أ- دراسة الإلتواء: $F_1 = \frac{\mu_3}{SD^3} = 0.512$، وجود التواء موجب.

ب- دراسة التطاول: $F_2 = \frac{\mu_4}{SD^4} = -0.444$، وجود تفلطح.

التمرين الثالث عشر:

1- تحديد الوسيط و المنوال للسلسلتين A &B:

أ- تحديد الوسيط:

- السلسلة A: أولا ترتيب قيم المتغير الإحصائي ترتيبا تصاعديا:

$$3-5-6-7-10-12-15-18$$

الوسيط هو عبارة عن الوسط الحسابي للقيمة الرابعة والخامسة:

$$M_{e.A} = \frac{17}{2} = 8.5$$

- السلسلة B: بنفس الطريقة السابقة، يحدد الوسيط لهذه السلسلة:

$$M_{e.B} = \frac{17}{2} = 8.5$$

ب- تحديد المنوال:

- السلسلة A: لا يوجد منوال لأن كل القيم لها نفس التكرار.

- السلسلة B: سلسلة ثنائية المنوال: $M_{01} = 8; M_{02} = 9$، لأن القيمتين مكررتين بنفس التكرار.

2- لا يمكن استعمال المدى العام للمقارنة بين السلسلتين، و يمكن استعمال المدى الربيعي مثلا، لأن المدى العام للسلسلة A يساوي المدى العام للسلسلة B

3- مقياس التشتت المناسب هو المدى الربيعي:

- المدى الربيعي لـــ A: $Q_3 - Q_1 = 12 - 5 = 7$.

- المدى الربيعي لـــ B: $Q_3 - Q_1 = 9 - 8 = 1$.

نلاحظ أن التوزيع A أكثر تشتتا من التوزيع B .

التمرين الرابع عشر:

1- حساب معامل الاختلاف:

أ- حساب الوسط الحسابي للتوزيعين(الإحصاء والمنهجية): يبين الجدول التالي مختلف العمليات الحسابية:

$$Z_1 = x_i - x_0 ; Z_2 = n_{i.1}(x_i - x_0) ; Z_3 = n_{i.2}(x_i - x_0)$$

ج:3.14

x_i	$(x_i - x_0)$	$n_{i.1}(x_i - x_0)$	$n_{i.2}(x_i - x_0)$
2	-8	-8	-16
4	-6	-18	-18
5	-5	-30	-25
7	-3	-24	-21
9	-1	-14	-10
10	0	0	0
11	1	25	20
13	3	54	66
14	4	8	40
15	5	10	25
16	6	6	6
$\sum$		9	67

$$\overline{x}_1 = 10 + \frac{9}{100} = 10.09; \overline{x}_2 = 10 + \frac{67}{100} = 10.67 .$$

ب- حساب الإنحراف المعياري للتوزيعين:

$$SD_1 = \sqrt{108.93 - 101.808} = 2.668$$

$$SD_2 = \sqrt{123.13 - 113.84} = 3.0464$$

ج- حساب معامل الاختلاف للتوزيعين:

$$\cdot cv_1 = \frac{2.668}{10.09} \times 100 = 26.44\% \text{ ، } cv_2 = \frac{3.0464}{10.67} \times 100 = 28.55\%$$

التوزيع الأول أقل تشتتا من التوزيع الثاني.

2- حساب معامل التغير الربيعي: لحساب ذلك نضع التكرار التجميعي الصاعد للتوزيعين:

ت.ت.ص	1	4	10	18	32	52	77	95	97	99	100
ت.ت.ص	2	5	10	17	27	42	62	84	94	99	100

أ-معامل التغير الربيعي للتوزيع الأول: هو عبارة عن النسبة بين المدى الربيعي والربيعي الثاني، نحدد كل من الربيعي الأول والثاني والثالث:

$$\frac{(Q_3 - Q_1)}{Q_2} = \frac{4}{10} = 0.4 \text{ :إذن ، } Q_1 = 9; Q_2 = 10; Q_3 = 13$$

ب- معامل التغير الربيعي للتوزيع الثاني:

$$.\frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} = \frac{13 - 9}{11} = 0.363$$

3- مقارنة تشتت العلامات في التوزيعين بناء على نتائج السؤال الأول والثاني:

عند استعمال معامل الاختلاف وجدنا أن التوزيع الأول أقل تشتتا من التوزيع الثاني. أما عند قياس التشتت بالنسبة لمركز التوزيع فقط أي

بالنسبة لـــ: 50% المركزية من الوحدات الإحصائية و جدنا أن التوزيع الثاني أقل تشتتا من التوزيع الأول .

4- مقارنة شكل التوزيعين باستعمال معامل برسن:

أ- قياس التواء التوزيع الأول: $P_1 = \frac{59.69}{360.67} = 0.165$ ، التواء موجب.

ب- قياس إلتواء التوزيع الثاني: $P_1 = \frac{(-22.96)^2}{799.32} = 0.659$.

ج- قياس تطاول التوزيع الأول:

$$m_2 = 108.93; m_3 = 1250.55; m_4 = 14393.37$$

$$P_2 = \frac{\mu_4}{SD^4} = \frac{-633.7576}{50.669} = -12.5$$

نلاحظ أن: $P_2 < 3$ إذن وجود تفلطح في التوزيع الأول.

د- قياس تطاول التوزيع الثاني:

$$P_2 = \frac{\mu_4}{SD^4}$$

$$\mu_4 = m_4 - 4.m_1.m_3 + 6.m_1^2.m_2 - 3.m_1^4$$

$$= 1860325 - 6354582 + 18410929 - 38884716 = 1002820039$$

$$P_2 = \frac{1002820039}{9.28} = 116432$$

نلاحظ أن $P_2 > 3$ إذن التوزيع الثاني ذو تطاول شديد.

التمرين الخامس عشر:

لتحديد المجموعة الأكثر تجانسا، نستعمل مقياسا من مقاييس التشتت، والمقياس الملائم حسب المعطيات المتوفرة، هو النسبة بين المدى العام والوسط الحسابي:

التوزيع الأول (المعدلات في معهد الاقتصاد): $\frac{E}{\overline{x}}=\frac{17-12}{13}=\frac{5}{13}$.

- التوزيع الثاني(المعدلات في معهد الحقوق): $\frac{E}{\overline{x}}=\frac{16-11}{14}=\frac{5}{14}$.

نلاحظ أن المعدلات في معهد الحقوق أكثر تجانسا من معهد الاقتصاد.

التمرين السادس عشر:

الإجابة عن الأسئلة النظرية:

1- تستخدم مقاييس التشتت المطلقة في المقارنة بين عدة توزيعات إحصائية بوحدات قياس متماثلة، كما تستخدم في تحديد التوزيعات النظرية الموافقة لتوزيعات تجريبية معينة. أما مقاييس التشتت النسبية، فتستخدم في مقارنة تشتت عدة توزيعات إحصائية بوحدات قياس مختلفة، كما تستخدم في تحديد جودة التوزيعات الإحصائية.

2- الفرق بين المدى العام والمدى الربيعي:

المدى الربيعي هو جزء من المدى العام. ويحتوي المدى العام على كل الوحدات الإحصائية التي تشكل العينة أو المجتمع، بينما يحتوي المدى الربيعي على 50% من المجتمع أو العينة.

يمثل المدى الربيعي 50% من المدى العام في حالة توزيع متماثل، ويمثل أقل من هذه النسبة في حالة توزيع ذو تشتت ضعيف، كما يمثل أكثر من النسبة السابقة من المدى العام في حالة تشتت قوي نسبيا.

3- إذا كانت الخصائص الثلاثة للنزعة المركزية متساوية $\overline{x} = M_0 = M_e$ لتوزيعين تكراريين، فهذا لا يعني أنهما متشابهان، فيمكن أن يكون إحداهما متطاول والأخر متفلطح، وهذا حسب قيمة مقياس الشكل المستعمل.

4- يستعمل الوسط الحسابي في حالة وجود علاقة طردية بين خاصيتين وفي كل الحالات الأخرى ماعدا الاستعمالات الخاصة بالوسط الهندسي والوسط التوافقي.

ويستعمل الوسط الهندسي في حالات خاصة منها: في حساب متوسط الأرقام القياسية وفي حساب المعدلات(المعدل المتوسط لسعر الفائدة، المعدل المتوسط للنمو...الخ).

أما الوسط التوافقي فيستعمل في حالات استثنائية، كوجود علاقة عكسية بين خاصيتين (السعر المتوسط(علاقة عكسية بين السعر والقدرة الشرائية)، السرعة المتوسطة(علاقة عكسية بين الزمن والسرعة)،...الخ).

التمرين السابع عشر:

عندما تكون الخصائص الثلاثة للنزعة المركزية(الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) متساوية فإن التوزيع التكراري يكون متناظر بالنسبة لهذه الخصائص، وتقع هذه الأخيرة في مركز الفئة المنوالية أو الوسيطة، وبالتالي فإن هذه الخصائص تساوي ما يلي:

$\overline{x} = M_0 = M_e = A + \frac{K}{2}$، إذن حسب العلاقة المعطاة في السؤال،

يمكن كتابة ما يلي:

$$M_0 = A + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}.K = A + \frac{K}{2} \Rightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

التمرين الثامن عشر:

1- الأجر المتوسط في هذه الحالة هو الوسيط لأن الجدول مفتوح من الأعلى ومن الأسفل:

$$.\ M_e = 70 + \frac{[50 - 27.68].10}{24.61} = 79.069$$

2- المقياس المناسب لقياس تشتت هذا التوزيع هو النسبة بين المدى الربيعي والمدى العام:

$$Q_1 = 60 + \frac{[25 - 12.3].10}{15.38} = 68.257$$

$$Q_3 = 90 + \frac{[75 - 73.82].10}{15.38} = 90.767$$

$$\Re = \frac{Q_3 - Q_1}{E}.100 = \frac{90.767 - 68.257}{70}.100 = 32.157\%$$

من خلال هذه النسبة نلاحظ أن التشتت ضعيف.

3- لقياس الالتواء نستعمل مقياس يول وكاندال:(YULE & KENDALL)

$$C_{Y.K} = \frac{(Q_3 - Q_1) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

$$C_{Y.K} = \frac{(90.767 - 79.069) - (79.069 - 68.257)}{90.767 - 68.257} = 0.039$$

من خلال هذه النتيجة، نلاحظ أن التواء هذا التوزيع موجب وضعيف.

4- لا يعد الانحراف المعياري مقياسا ملائما للتشتت لأن جدول التوزيع التكراري مفتوحا من الأعلى ومن الأسفل.

5- نقوم بمقارنة النسبة التجريبية مع النسبة النظرية للمجال $\left[\overline{x} \pm SD\right]$، إذا فرضنا أن طول الفئة الأولى والأخيرة يساوي 10، ويبين الجدول التالي مختلف العمليات الحسابية:

ج:3.15

x_i	$n_i(x_i - \overline{x})$	$n_i x_i^2$
55	-369	37207.5
65	-307.6	64980.5
75	-246.1	138431.2
85	0	155554.2
95	153.8	138804.5
105	153.8	84782.25
115	92.1	40600.75

$$\bar{x} = 85 + \frac{(-523)}{100} = 79.77$$

$$SD = \sqrt{\frac{\Sigma n_i \cdot x_i^2}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{6603.61 - 6363.25} = 15.503$$

المجال التجريبي: $[79.77 \pm 15.503] = [64.266 \rightarrow 95.273]$

إذن النسبة التجريبية هي:

$$8.818 + 24.61 + 21.53 + 8.109 = 63.067\%$$

علما أن النسبة النظرية هي 68% ، نلاحظ وجود فرقا ضئيلا بين النسبة التجريبية والنسبة النظرية.



الفصل الرابع
الأرقام القياسية
Les Indices Statistiques

الأرقام القياسية هي عبارة عن مؤشرات إحصائية، تستعمل لقياس تطور سعر أو كمية مادة أو عدة مواد بين فترتين زمنيتين مختلفتين أو بين مجموعتين أو بين مكانين.

تشكل الأرقام القياسية (للأسعار، للعملة، للبورصة، للأجور...) مؤشرات هامة في صيرورة الاقتصاديات المتطورة، لما لها من أثار بليغة على النشاطات الاقتصادية، فأي قرار سياسي أو اقتصادي يؤدي بها إلى التغير سلبا أو إيجابا.

ويمكن أن نميز بين نوعين من الأرقام القياسية: الأرقام القياسية البسيطة والتجميعية حيث تستعمل في حالة وجود نفس المستوى من الأهمية أو الترجيح للمواد المدروسة. وتستعمل الأرقام القياسية المرجحة عندما يكون للمواد المدروسة مستويات متفاوتة من الأهمية والترجيح مثلا: مجموعات المواد المستهلكة من طرف الأسرة لها مستويات متباينة من الأهمية: التغذية، الألبسة، النقل والمواصلات، الصحة والترفيه...، تقاس هذه الأهمية في هذه الحالة بمعامل الميزانية أو بعدد الوحدات المستهلكة.

1- أنواع الأرقام القياسية:

أ- الرقم القياسي البسيط: يقيس تطور سعر أو كمية مادة واحدة فقط بين فترتين زمنيتين مختلفتين أو بين مكانين مختلفين. وهو عبارة عن النسبة بين سعر أو كمية الفترة أو السنة الحالية أو المدروسة وسعر أو كمية فترة أو سنة الأساس يرمز للسنة الحالية أو المدروسة بالرمز t_1 ويرمز لسنة أو فترة الأساس بالرمز t_0. تكتب العلاقة الإحصائية للرقم القياسي البسيط بالشكل التالي:

- العلاقة الإحصائية للرقم القياسي البسيط للأسعار:

$$I_{P.t_1/t_0} = \frac{P_1}{P_0}.100.$$

- العلاقة الإحصائية للرقم القياسي البسيط للكميات:

$$I_{Q.t_1/t_0} = \frac{Q_1}{Q_0}.100.$$

يمكن أن نميز بين ثلاثة حالات لقيم الرقم القياسي البسيط:

الحالة الأولى: ثبات في تطور السعر أو الكمية، ففي هذه الحالة الرقم القياسي يساوي 100.

الحالة الثانية: انخفاض في السعر أو الكمية، فقيمة الرقم القياسي تكون أقل من 100.

الحالة الثالثة: تكون قيمة الرقم القياسي أكبر من 100 في حالة زيادة أو ارتفاع في السعر أو الكمية.

الملاحظة الأولى: الزيادة أو الارتفاع هو عبارة عن الفرق بين القيمة المتحصل عليها و100، أما الانخفاض فهو عبارة عن100 ناقص النتيجة المتحصل عليها.

الملاحظة الثانية: يتراوح مقدار الزيادة أو الارتفاع من0 إلى∞، بينما يتراوح مقدار الانخفاض من0 إلى 100.

مثال: في 1984/12/25 كان سعر الفرنك الفرنسي يساوي 0.64 د.ج، وفي 1995/12/25 أصبح سعر الفرنك الفرنسي يساوي 10.98د.ج.

المطلوب ما يلي: ما هو الرقم القياسي لسعر الفرنك بالنسبة للدينـــار، وما هو الرقم القياسي لسعر الدينار بالنسبة للفرنك؟.

- الرقم القياسي لسعر الفرنك بالنسبة للدينار بين الفترتين:

$$I_{P.95/84} = \frac{10.98}{0.64} \times 100 = 1715.62\%$$

مقدار ارتفاع الفرنك بالنسبة للدينار بين سنة 1995 و1984 يساوي 1615.62%.

- الرقم القياسي لسعر الدينار بالنسبة للفرنك الفرنسي:

$$I_{P.95/84} = \frac{0.091}{1.56} \times 100 = 5.83\%$$

مقدار انخفاض الدينار بالنسبة للفرنك يساوي 94.17%.

ب- الرقم القياسي التجميعي: وهو عبارة عن النسبة بين أسعار أو كميات مجموعة من المواد في السنة المدروسة ومجموع أسعار أو كميات هذه المواد في سنة الأساس.

حسب هذا التعريف، تعطى العلاقة الإحصائية للرقم القياسي التجميعي بالشكل التالي:

$$I_{1/1} = \frac{\sum P_1^j}{\sum P_1^j}.100; I_{2/1} = \frac{\sum P_2^j}{\sum P_1^j}.100; ....$$

$$..; I_{m/1} = \frac{\sum P_m^j}{\sum P_1^j}.100$$

حيث أن m هو عدد الفترات أو السنوات، و j هو عدد المواد، علما أن السنة الأولى هي سنة الأساس.

مثال: يبين الجدول التالي أسعار 3 مواد خلال 4 سنوات.

المطلوب تحديد الرقم القياسي التجميعي علما أن سنة الأساس هي السنة الأولى؟.

ج:4.1

قزوال سعر اللتر1	بنزين عادي سعر ل1/2	بنزين ممتاز سعر ل1	
2	2.5	6	السنة الأولى
6	4.10	9.5	السنة الثانية
6.5	4.25	11	السنة الثالثة
9.5	7.25	16.5	السنة الرابعة

$$I_{Pt_2/t_1} = \frac{9.5+4.10+6}{6+2.5+2} = \frac{19.6}{10.5}.100 = 186.66\%$$

$$I_{Pt_3/t_1} = \frac{21.75}{10.5}.100 = 207.14\%$$

$$I_{Pt_4/t_1} = \frac{40.5}{10.5}.100 = 385.71\%$$

انطلاقا من هذه النتائج، نلاحظ أن أسعار المواد الثلاثة ارتفعت بمقدار 86.66% من السنة الأولى إلى السنة الثانية، ثم تواصل هذا الارتفاع ليصل إلى 107.14% في السنة الثالثة، وإلى 285.71% في السنة الرابعة.

2- خصائص الأرقام القياسية:

حتى نتمكن من اختبار واختيار أحسن وأفضل الأرقام القياسية، نستعمل المعايير الرياضية التالية:

المعيار الأول: خاصية الانعكاس (Propriété de réversibilité)

نفرض أن: I_{t_1/t_0} الرقم القياسي للسنة t_1 مقارنة بالسنة t_0 و I_{t_0/t_1} الرقم القياسي للسنة t_0 مقارنة بالسنة t_1، فإن خاصية الانعكاس تتمثل فيما يلي:

الرقم القياسي الأول× الرقم القياسي الثاني = 100^2 وتكتب العلاقة بينهما بالشكل التالي: $I_{t_1/t_0} \times I_{t_0/t_1} = 100^2$.

تنطبق هذه الصياغة الإحصائية على كل الأرقام القياسية، فالرقم القياسي الذي يحقق هذه الخاصية نقول عنه أنه حقق المعيار الأول والعكس صحيح.

المعيار الثاني: خاصية التحويل أو الدوران

(Propriété de circularité ou de transférabilité)

يمكن حساب الرقم القياسي I_{t_3/t_0} مثلا باستعمال الأرقام القياسية الوسيطة:، ويكون ذلك بالشكل التالي: $I_{t_3/t_2} ; I_{t_2/t_1} ; I_{t_1/t_0}$

فإذا تساوى الطرفان نقول أن خاصية التحويل تحققت.

مثال: تبين الأرقام القياسية التالية تطور أسعار النفط في فترات متتالية: $I_{t_1/t_0} = 71.4\%; I_{t_2/t_1} = 72\%; I_{t_3/t_2} = 83.3\%$ ، المطلوب تحديد الرقم القياسي للفترة الثالثة بالنسبة للفترة صفر باستعمال خاصية التحويل أو الدوران؟

الحل: لتطبيق خاصية التحويل، نفرض أن الرقم القياسي المستعمل يحقق هذه الخاصية، بناءا على هذه الفرضية يمكن الإجابة عن السؤال بالشكل التالي:

$$I_{t_3/t_0} = \frac{83.3 \times 72 \times 71.4}{100^{3-1}} = 42.8\%$$

نلاحظ أن مقدار الانخفاض بين الفترة الثالثة و الفترة صفر هو:

$$100 - 42.8 = 57.2\%$$

المعيار الثالث: تغيير وحدة القياس Changement d'unité de mesure

لا يعتبر هذا المعيار من المعايير الرياضية، غير أنه يؤثر في جودة الرقم القياسي. ويتمثل هذا المعيار في أنه إذا تغيرت وحدة القياس فإن قيمة الرقم القياسي لا تتغير، ولكن هذا الافتراض لا يتحقق بالنسبة لبعض الأرقام القياسية ومن هنا جاءت ضرورة إدخال هذا المعيار ضمن المعايير الرياضية. إن جودة وأهمية الرقم القياسي تكمن في تحقيقه لأكبر عدد من هذه المعايير.

مثال: نقوم بتغيير وحدة القياس للمثال السابق المتعلق بأسعار مشتقات النفط في الجدول التالي:

ج:4.2

	قزوال 2/1لتر	بنزين عادي 1لتر	بنزين ممتاز 2/1لتر
السنة الأولى	1	5	3
السنة الثانية	3	8.20	4.75
السنة الثالثة	3.25	8.50	5.5
السنة الرابعة	4.25	14.5	8.25

المطلوب حساب الرقم القياسي التجميعي؟.

الأرقام القياسية التجميعية لمختلف الفترات هي كالتالي:

$$.\ I_{2/1} = \frac{15.95}{9}.\ 100 = 17722\%$$

$$\cdot I_{3/1}=\frac{17.25}{9}.100=191.66\%$$

$$\cdot I_{4/1}=\frac{27}{9}.100=300\%$$

نلاحظ أنه عند تغيير وحدة القياس تغيرت قيم الأرقام القياسية لنفس الفترات، وهذا يبين أن تغيير وحدة القياس تؤثر في الرقم القياسي التجميعي وبالتالي فإنه لا يحقق المعيار الثالث أو الخاصية الثالثة.

3- متوسط الأرقام القياسية: (Moyenne des indices)

إن تحديد الوسط المستعمل لحساب متوسط الأرقام القياسية يخضع للمعايير والخصائص المذكورة سابقا، فالوسط الذي يحقق أكبر عدد من هذه المعايير يعتبر أحسن من غيره. إذن إذا أردنا قياس تطور أسعار أو كميات مجموعة معينة من المواد خلال فترات محددة من الزمن أو بين أماكن مختلفة فما هو الوسط الذي يمكن استعماله $G;H;Q;\overline{X}$؟ للإجابة عن هذا السؤال، نقوم باختبار كل من هذه المتوسطات باستعمال معيار الانعكاس، التحويل و تغيير وحدة القياس.

أ- الوسط الحسابي للأرقام القياسية: (Moyenne Arithmétique des indices) هو عبارة عن الوسط الحسابي للمناسيب أي النسب بين أسعار أو كميات السنة المدروسة و أسعار أو كميات سنة الأساس.

ويرمز له بالرمز $I_{\overline{X}ti/t0}$، ويكتب بالشكل التالي: $\cdot I_{\overline{X}\,ti/t0}=\frac{\sum\frac{P_i^j}{P_1^j}}{N}.100$

مثال: نفس المثال السابق المتعلق بمشتقات النفط.

المطلوب حساب الوسط الحسابي للأرقام القياسية ثم أختبر هذا الوسط بتطبيق المعايير الثلاثة ؟.

الحل:

1 - الوسط الحسابي للأرقام القياسية لمختلف الفترات:

- للفترة الثانية بالنسبة للفترة الأولى:

$$I_{\bar{x}_{t_{2/1}}} = \frac{[9.5/6+4.1/2.5+6/2].100}{3} = 207.44\%$$

- للفترة الثالثة بالنسبة للفترة الأولى:

$$I_{\bar{X}t_3/t_1} = \frac{\frac{11}{6}+\frac{4.25}{2.5}+\frac{6.5}{2}}{3}.100 = 226.11\%$$

- للفترة الرابعة بالنسبة للفترة الأولى:

$$I_{\bar{X}.t_4/t_1} = \frac{[16.5/6+14.5/2.5+9.5/2].100}{3} = 443.33\%$$

2- اختبار الوسط الحسابي للأرقام القياسية:

- خاصية الانعكاس:هل الطرف الأول=الطرف الثاني:

$$I_{\bar{x}.t_2/t_1} \times I_{\bar{x}.t_1/t_2} = 100^2$$

لدينا: $I_{\bar{x}.t_2/t_1} = 207.44\%$ و نبحث عن قيمة الحد الأخر:

$$I_{\bar{x}t_1/t_2} = \frac{\left(\frac{6}{9.5}+\frac{2.5}{4.1}+\frac{2}{6}\right)}{3} = 52.48\ \%$$

نلاحظ أن: $207.44 \times 52.48 \neq 100^2$ أي أن الطرف الأول لا يساوي الطرف الثاني، نستنتج أن الوسط الحسابي للأرقام القياسية لا يحقق خاصية الانعكاس.

- خاصية التحويل: هل المقدار الأول يساوي المقدار الثاني:

$$I_{\bar{x}t_3/t_1} = \frac{I_{\bar{x}t_3/t_2} \times I_{\bar{x}t_2/t_1}}{100}.$$

لقد وجدنا من قبل أن: $I_{\bar{x}.t_3/t_1} = 226.11\%; I_{\bar{x}.t_2/t_1} = 207.44\%$

ونبحث عن المقدار التالي:

$$I_{\bar{x}.t_3/t_2} = \frac{\frac{11}{9.5}+\frac{4.25}{4.1}+\frac{6.5}{6}}{3} \times 100 = 109.26\%$$

نلاحظ أن الطرف الأول = الطرف الثاني أي أن:

$$I_{\bar{x}.t_3/t_2} \times I_{\bar{x}.t_2/t_1} = 109.26 \times 207.44 = 226.11\%$$

نستنتج أن الوسط الحسابي للأرقام القياسية يحقق خاصية التحويل.

- خاصية تغيير وحدة القياس: نقوم بتغيير وحدة القياس حسب الجدول التالي:

ج:4.3

	بنزين ممتاز 1/2لتر	بنزين عادي 1 لتر	قزوال 1/2لتر
السنة الأولى	3	5	1
السنة الثانية	4.75	8.20	3
السنة الثالثة	5.5	8.5	3.25

بعد تغيير وحدة القياس، نحدد الوسط الحسابي للأرقام القياسية للفترات التالية:

$$I_{\bar{x}.t_2/t_1} = \frac{\frac{4.75}{3} + \frac{8.2}{5} + 3}{3} \times 100 = 207.44\%$$

$$I_{\bar{x}.t_3/t_1} = \frac{\frac{5.5}{3} + \frac{8.5}{5} + 3.25}{3} \times 100 = 226.11\%$$

نلاحظ أننا تحصلنا على نفس النتائج السابقة قبل تغيير وحدة القياس، إذن الوسط الحسابي للأرقام القياسية يحقق الخاصية الثالثة أي لا يتأثر بتغيير وحدة القياس.

ب- الوسط الهندسي للأرقام القياسية:(Moyenne géométrique des indices)

وهو عبارة عن الجذر النوني لجداء المناسيب، وتكتب العلاقة الإحصائية للوسط الهندسي بالشكل التالي:

$$I_{g.t_i/t_0} = \sqrt[n]{\frac{\prod P_i^j}{\prod P_0^j}}.100$$

مثال: نفس المثال السابق المتعلق بمشتقات النفط، المطلوب حساب الوسط الهندسي للأرقام القياسية، ثم اختبار هذا الأخير بواسطة المعايير الثلاثة السابقة:

- حساب الوسط الهندسي للأرقام القياسية لمختلف الفترات:

الفترة الثانية بالنسبة للفترة الأولى:

$$I_{g.t_2/t_1} = \sqrt[3]{\frac{9.5 \times 4.1 \times 6}{6 \times 2.5 \times 2}}.100 = 198.22\%$$

الفترة الثالثة بالنسبة للفترة الأولى:

$$I_{gt_3/t_1} = \sqrt[3]{\frac{11 \times 4.25 \times 6.5}{6 \times 2.5 \times 2}}.100 = 216.38\%$$

- اختبار الوسط الهندسي للأرقام القياسية:

الخاصية الأولى: هل المقدار الأول=المقدار الثاني؟ أي هل

؟ $I_{g.t_2/t_1} \times I_{g.t_1/t_2} = 100^2$.

لدينا: $I_{gt_2/t_1} = 198.22\%$ و بنفس الطريقة نبحث عن المقدار الثاني:

$$I_{gt_1/t_2} = \frac{3.107}{6.159} \times 100 = 50.44\%$$

وبتطبيق خاصية الانعكاس نجد مايلي: $198.22 \times 50.44 = 100^2$ 198.22

الطرف الأول=الطرف الثاني، إذن الوسط الهندسي للأرقام القياسية يحقق خاصية الانعكاس.

الخاصية الثانية: هل الطرف الأول يساوي الطرف الثاني للمعادلة التالية؟.

$$I_{gt_3/t_1} = \frac{I_{gt_3/t_2} \times I_{gt_2/t_1}}{100}$$

من المثال السابق تحصلنا على ما يلي: $I_{gt_3/t_1} = 216.38\%$، $I_{gt_2/t_1} = 198.22\%$ ومن الجدول السابق، نحدد الحد المجهول بالشكل التالي:

$$I_{gt_3/t_2} = \frac{6.723}{6.159} \times 100 = 109.15\%$$

حيث نجد أن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني:

$I_{gt_3/t_1} = \frac{109.105}{198.22} \times 100 = 216.38\%$ وهي نفس النتيجة السابقة، إذن الوسط الهندسي للأرقام القياسية يحقق خاصية التحويل.

الخاصية الثالثة: هل يتأثر الوسط الهندسي للأرقام القياسية بتغيير وحـــدة القياس؟

نجيب على هذا السؤال انطلاقا من المثال السابق المتعلق بأسعار مشتقات النفط بعد تغيير وحدة القياس:

يبين الجدول التالي أسعار مشتقات النفط بعد تغيير وحدة القياس:

ج:4.4

	بنزين ممتاز 1/2لتر	بنزين عادي 1لتر	قزوال 1/2لتر
السنة الأولى	3	5	1
السنة الثانية	4.75	8.20	3
السنة الثالثة	5.5	8.50	3.25

حساب الوسط الهندسي للأرقام القياسية بعد تغيير وحدة القياس:

- للفترة الثانية بالنسبة للفترة الأولى:

$$I_{gt_2/t_1} = \frac{(4.75 \times 8.20 \times 3)^{\frac{1}{3}}}{(3 \times 5 \times 1)^{\frac{1}{3}}} = 198.22\% .$$

- للفترة الثالثة بالنسبة للفترة الأولى:

$$I_{gt_3/t_1} = \frac{(5.5 \times 8.5 \times 3.25)^{\frac{1}{3}}}{(3 \times 5 \times 1)^{\frac{1}{3}}} = 216.38\% .$$

نلاحظ التساوي بين النتيجتين قبل تغيير وحدة القياس وبعده، إذن الوسط الهندسي لا يتأثر بتغيير وحدة القياس.

نتيجة: يحقق الوسط الهندسي للأرقام القياسية كل الخصائص الرياضية ولا يتأثر بتغيير وحدة القياس، إذن يعتبر الوسط الهندسي من أحسن المتوسطات لحساب الأرقام القياسية.

ج- الوسط التوافقي وألتربيعي للأرقام القياسية:

بنفس الطريقة نجد أن كل من الوسط التوافقي والوسط ألتربيعي للأرقام القياسية لا يحققان كل الخصائص والمعايير الرياضية للأرقام القياسية. لذلك يعتبر الوسط الهندسي أحسن المتوسطات لحساب الأرقام القياسية.

4- العناصر الضرورية لصياغة رقم قياسي:

(Les éléments essentiels d'élaboration d'un indice)

إن أهم العناصر الضرورية لصياغة رقم قياسي هي كالتالي:

أ- العلاقة الإحصائية المستعملة: يمكن أن نميز هنا بين ثلاثة حالات:

- الرقم القياسي البسيط: توجد علاقة واحدة للرقم القياسي البسيط عندما يتعلق الأمر بقياس تطور سعر أو كمية مادة واحدة، إذن لا يوجد لدينا اختيار.
- **الرقم القياسي التجميعي غير المرجح:** يعتبر الوسط الهندسي للأرقام القياسية من أحسن المتوسطات لأنه يحقق كل الخصائص الرياضية ولا يتأثر بتغيير وحدة القياس.
- **الرقم القياسي التجميعي المرجح:** يعتبر الوسط الهندسي من أحسن الأرقام القياسية التجميعية المرجحة أو غير المرجحة، ولكن نظرا لمشكلة الترجيح والصعوبة الحسابية للوسط الهندسي، وضع كل من باش ولاسبير علاقتين للرقم القياسي المرجح يعتمد الأول على

ترجيحات السنة الحالية و يعتمد الثاني على ترجيحات سنة الأساس، وذلك حسب المعطيات المتوفرة لدى الباحث.

ب- سنة الأساس: (Période de base)

تتحدد دقة قياس تطور الظاهرة المدروسة على أساس السنة المرجعية أي سنة الأساس فمن الأفضل أن تكون هذه السنة أو الفترة عادية وحيادية عن كل التطورات والتغيرات المفاجئة والعشوائية (تغير مفاجئ للأسعار الناتج عن ندرة أو فائض في الإنتاج ...إلى غير ذلك من النكسات التي تصيب الاقتصاد) وإذا تعذر ذلك، يمكن اختيار سنة أو فترة أساس متحركة(في هذه الحالة سنة الأساس هي السنة السابقة مباشرة)، أو يؤخذ بعين الاعتبار متوسط عدة سنوات سابقة كفترة أساس.

فكلما كانت سنة الأساس بعيدة في الزمن عن السنة المدروسة كلما أعطى الرقم القياسي صورة غير حقيقية عن الظاهرة تحت الدراسة، وهذا راجع إلى عدة أسباب واعتبارات من بينها:

- إقلاع المستهلكين عن استهلاك بعض السلع.
- اختفاء بعض المواد من السوق أو أعطها التطور التقني شكلا أخر.
- ظهور سلع بديلة في السوق...الخ.

في هذه الحالة، تعدل أو تصحح السلسلة الإحصائية القديمة وتربط بسلسلة جديدة بسنة أساس جديدة.

يتم هذا الربط بواسطة معامل ربط، وهو عبارة عن النسبة بين الرقم القياسي لسنة الأساس في السلسلة الجديدة والرقم القياسي لنفس السنة في السلسلة القديمة: $CR = \frac{I_{t_1/t_0}}{I_{t_1/t_1}}$.

مثال: تبين السلسلتان التاليتان الأرقام القياسية لأسعار التجزئة لبلد ما لـ:250 مادة، اعتبرت سنة 1987 كسنة أساس للسلسلة الأولى، واعتبرت سنة 1992 كسنة أساس للسلسلة الثانية. المطلوب وضع السلسلة المعدلة أو المصححة؟.

السلسلة الأولى:

السنة	87	88	89	90	91	92	93
الرقم القياسي	100	107	113	126	135.1	141.6	149.7

السلسلة الثانية:

السنة	92	93	94	95
الرقم القياسي	100	104.9	108.2	113.2

الحل:

حساب معامل التصحيح بين السلسلتين:

$$CR = \frac{I_{92/87}}{I_{92/92}} = \frac{141.6}{100} = 1.416$$

وللحصول على السلسلة المعدلة أو المصححة نقوم بضرب الأرقام القياسية للسلسلة الثانية في معامل التصحيح:

الجدول 4.5

السنة	87	88	89	90	91
الرقم القياسي	160.29	153.2	148.5	141.6	135.1
السنة	92	93	94	95	
الرقم القياسي	126	113	107	100	

ج- اختيار المواد أو السلع التي تدخل في تكوين أو صياغة الرقم القياسي:

يتعلق الأمر هنا بالأرقام القياسية المرجحة، فلا يمكن أن يكون لمختلف المواد والسلع والخدمات نفس المستوى من الأهمية والترجيح، مثلا السلع والمواد والخدمات التي تدخل في تكوين ميزانية الأسرة المخصصة للاستهلاك تختلف فيما بينها من حيث الأهمية، فهذه الأخيرة تتحدد حسب معامل الميزانية أي حسب ما يخصص من الميزانية لاقتناء هذه السلعة أو الخدمة. والأمر لا يتعلق هنا بالاستهلاك فقط بل يتعلق بكل مجالات الحياة (الإنتاج، الاستثمار، التجارة الداخلية والخارجية، الأسهم والسندات...الخ)، ونظرا للعدد الكبير من المواد والسلع المتداولة، فلا يمكن أن تدخل كلها في صياغة الرقم القياسي بل يقتصر على أهمها(السلع الممثلة) وهذا حسب مجموعات المواد والسلع فمثلا بالنسبة للحليب ومشتقاته، تختار مادة واحدة لتمثيل هذه المجموعة ولتكن الحليب أو المادة التي يكون سعرها قريب من السعر المتوسط للمجموعة ككل.

تقاس الأهمية والترجيح بوحدة قياس السلع المدروسة، ولكن المشكلة المطروحة هنا تتمثل في اختيار أهمية المواد لسنة الأساس أو للسنة المدروسة. اختلف الإحصائيون في هذه المسألة، فمنهم من أخذ بعين الاعتبار أهمية المواد في السنة المدروسة ومنهم من ركز على أهمية المواد في سنة الأساس وفضل البعض الأخر متوسط الترجيح للفترتين...الخ، يتوقف ذلك على توفر المعطيات الخاصة بالظاهرة المدروسة. تتوقف السرعة والدقة في جمع المعطيات في وجود نظام معلوماتي وإحصائي فعال كما هو الشأن بالنسبة للدول المتطورة.

د- اختيار الرقم القياسي المرجح: (Choix de l'indice pondéré)

يتوقف اختيار الأرقام القياسية المرجحة على العوامل التالية:

- توفر المعطيات الخاصة بالظاهرة المدروسة.
- السهولة في الحساب.
- تحقيق الخصائص الرياضية.
- الهدف من وضع الرقم القياسي.

5- أهم الأرقام القياسية المرجحة المستعملة:

(Les indices pondérés les plus usités)

أ- الرقم القياسي لـــــ: لاسبير

(Laspeyres Mathématicien-Economiste Allemand 1834-1913)

استعمل لاسبير في حساب رقمه القياسي أهمية المواد لسنة الأساس. ويمكن أن نميز بين الرقم القياسي للأسعار والرقم القياسي للكميات:

- **الرقم القياسي للأسعار:** وهو عبارة عن النسبة بين الكتلة النقدية المدفوعة في السنة الحالية و الكتلة النقدية المدفوعة في سنة الأساس لاقتناء نفس كمية سنة الأساس.

تكتب علاقته الإحصائية بالشكل التالي:

$$I_{L.Pt_1/t_0} = \frac{\sum p_{1i} \times q_{0i}}{\sum p_{0i} \times q_{0i}}.100 .$$

- **الرقم القياسي للكميات:** وهو عبارة عن النسبة بين الكمية الكلية للسنة الحالية والكمية الكلية لسنة الأساس حسب سعر سنة الأساس:

$$I_{L.qt_1/t_0} = \frac{\sum q_{1i} \times p_{0i}}{\sum q_{0i} \times p_{0i}}.100 .$$

ب- الرقم القياسي لـــ: باش(Paasche Statisticien Allemand 1851-1925)

استعمل باش في حساب رقمه القياسي ترجيح السنة الحالية أو السنة المدروسة.

- **الرقم القياسي للأسعار:** وهو عبارة عن النسبة بين الكتلة النقدية المدفوعة في السنة الحالية والكتلة النقدية المدفوعة في سنة الأساس لاقتناء نفس كمية السنة الحالية.

تكتب علاقته الإحصائية بالشكل التالي:

$$I_{P.Pt_1/t_0} = \frac{\sum p_{1i} \times q_{1i}}{\sum p_{0i} \times q_{1i}}.100 .$$

- **الرقم القياسي للكميات:** وهو عبارة عن النسبة بين الكمية الكلية للسنة الحالية والكمية الكلية لسنة الأساس حسب سعر السنة الحالية، وتكتب علاقته الإحصائية بالشكل التالي:

$$.I_{P.qt_1/t_0} = \frac{\sum q_{1i} \times p_{1i}}{\sum q_{0i} \times p_{1i}}.100$$

ج- الرقم القياسي لـــــ: فيشر(Fisher)

وهو عبارة عن الوسط الهندسي للرقمين السابقين:(لاسبير وباش)

تكتب علاقته الإحصائية للسعر والكمية على التوالي بالشكل التالي:

$$I_{F.P} = \sqrt{I_{L.P} \times I_{P.P}}$$

$$I_{F.q} = \sqrt{I_{L.q} \times I_{P.q}}$$

ملاحظة: يعتبر الرقم القياسي لـــــ: فيشرمن أحسن الأرقام القياسية مقارنة مع الأرقام القياسية الأخرى.

د- الرقم القياسي لـــــ: مارشال (Marshall)

يستعمل مارشال في حساب رقمه القياسي متوسط ترجيح المواد للفترتين.

- **الرقم القياسي للأسعار:** وهو عبارة عن النسبة بين الكتلة النقدية المدفوعة في السنة الحالية والكتلة النقدية المدفوعة في سنة الأساس حسب الكمية المتوسطة، وتكتب علاقته بالشكل التالي:

$$.\ I_{M.P.t_1/t_0} = \frac{\sum p_{1i}(q_{0i} + q_{1i})}{\sum p_{0i}(q_{0i} + q_{1i})}.100$$

- **الرقم القياسي للكميات:** وهو عبارة عن النسبة بين الكمية الكلية للسنة الحالية والكمية الكلية لسنة الأساس حسب السعر المتوسط، وتكتب علاقته بالشكل التالي:

$$I_{M.q.t_1/t_0} = \frac{\sum q_{1i}(p_{0i} + p_{1i})}{\sum q_{0i}(p_{0i} + p_{1i})}.100$$

مثال: يبين الجدول التالي أسعار وكميات4 مواد خلال فترتين، المطلوب حساب الأرقام القياسية للأسعار لكل من فيشر، باش، مارشال؟.

ج:4.6

	P_0	q_0	P_1	q_1
A	50	6	70	5
B	70	4	90	3
C	20	3	25	6
D	30	8	32	9

الحل:

- الرقم القياسي للأسعار لــ: لاسبير

$$I_{L.P.t_1/t_0} = \frac{70\times6+90\times4+25\times3+32\times8}{50\times6+70\times4+20\times3+30\times8}.100 = 126\%$$

- الرقم القياسي للأسعار لــ: باش

$$I_{P.P.t_1/t_0} = \frac{70\times5+90\times3+25\times6+32\times9}{50\times5+70\times3+20\times6+30\times9}.100 = 124.47\%$$.

- الرقم القياسي للأسعار لـــ: فيشر:

$$I_{F.P.t_1/t_0} = \sqrt{126 \times 124.47} = 125.23\%$$

- الرقم القياسي للأسعار لـــ: مارشال $I_{M.P.t_1/t_0} = 125.34\%$.

ملاحظة: يتميز الرقم القياسي لـــ لاسبير بثبات قاعدة المقارنة مما يسهل في العمليات الحسابية، غير أن بعد سنة الأساس عن السنة المدروسة يعطي صورة غير حقيقية عن الظاهرة المدروسة.

يصبح ترجيح المواد عائقا ومشكلة لقاعدة لاسبير عند تطور أهمية المواد بسرعة في الزمن، وفي هذه الحالة يجب تغيير سنة الأساس حتى تتماشى مع المعطيات الجديدة.

أما الرقم القياسي لباش، يتغير نظام ترجيحه باستمرار، حيث يبين في نفس الوقت تطور ظاهرتين: أثر تغير الأسعار وأثر تغير بنية الاستهلاك. ومن هنا يصبح إجراء دراسات ميدانية مستمرة ضرورة ملزمة لكل باحث يريد الحصول على نتائج تعبر عن الواقع فعلا.

ملخص: يبين الجدول التالي مختلف الأرقام القياسية المرجحة:

ج:4.7

الأرقام القياسية	الأسعار	الكميات
لاسبير Laspeyres	$\frac{\Sigma P_{1i} \times q_{0i}}{\Sigma P_{0i} \times q_{0i}} . 100$	$\frac{\Sigma q_{1i} \times P_{0i}}{\Sigma q_{0i} \times P_{0i}} . 100$
Paasche باش	$\frac{\Sigma P_{1i} \times q_{1i}}{\Sigma P_{0i} \times q_{1i}} . 100$	$\frac{\Sigma q_{1i} \times P_{1i}}{\Sigma q_{0i} \times P_{1i}} . 100$
فيشر Fisher	$\sqrt{I_{LP} \times I_{PP}}$	$\sqrt{I_{Lq} \times I_{Pq}}$
مارشال Marshall	$\frac{\Sigma P_{1i}(q_{0i}+q_{1i})}{\Sigma P_{0i}(q_{0i}+q_{1i})} . 100$	$\frac{\Sigma q_{1i}(P_{0i}+P_{1i})}{\Sigma q_{0i}(P_{0i}+P_{1i})} . 100$

6- بعض الأرقام القياسية الأخرى:

أ- الأرقام القياسية للبورصة: (Indices de bourse)

تعتبر الأرقام القياسية للبورصات التالية من أشهر المؤشرات المالية في العالم:

- **داو جونز**(نيويورك) Dow Jones.
- **فاينالشال تايمز**(لندن) Financial Times.
- **نيكاي** (طوكيو) Nikei.
- **كاك40**(باريس) CAC 40...الخ.

سنأخذ مثالا عن بورصة داو جونز:

مؤشر داو جونز: يقيس هذا المؤشـــر تطور أسعار الأسهـــم والسنـــدات لثلاثين شركة صناعية هامة من بينها:

Good year; General Motors; Chrysler; Dupont; ITT;)
.(الخ...Winstinghouse; United Aircraft; American Tobacco

ويرمز لهذا المؤشر بالرمز DJIA (Dow Jones Industriel Average)، وتكتب العلاقة الإحصائية لمؤشر داو جونز بالشكل التالي:

1- **حسب ترجيح لاسبير**(Laspeyres):

$$I_{L.P.B} = \frac{\sum n_{i0} \times C_{i.j}}{\sum n_{i0} \times C_{i.0}} .100$$

حيث أن: $n_{i\,0}$ عدد الأسهم أو السندات في سنة الأساس للشركة i، $c_{i.j}$ سعر الأسهم أو السندات للشركة i في الفترة j.

2- **حسب ترجيح باش**(Paasche):

$$I_{P.P.B} = \frac{\sum n_{ij} \times C_{i.j}}{\sum n_{ij} \times C_{i.0}} .100$$

حيث أن n_{ij} عدد الأسهم أو السندات في السنة الحالية للشركة i.

3- العلاقة الثالثة نستعمل مفهوم الرسملة في السنة الحالية وفي سنة الأساس:

الرقم القياسي هو عبارة عن النسبة بين الرسملة في الفترة j والرسملة في فترة الأساس وتكتب علاقته بالشكل التالي:

$$. I_K = \frac{\sum n_{i.j} \times C_{i.j}}{\sum n_{i.0} \times C_{i.0}} .100$$

ملاحظة: تعتبـــر 1970/1/1 كسنـــة أساس لأغلـــب الأرقام القياسية أو مؤشرات البورصات المشهورة.

وتعتبر الأماكـــن التاليـــة من أهم أماكن البورصات العالمية:

(New York Amsterdam; Chicago; Hong kong; Kansas City; London; Philadelphia; San Francisco; Singapour; Stockholm; Sydney; Tokyo; Toronto; Zurich; Paris...الخ.)

ب- الرقم القياسي للأجور: (indice des salaires)

يقيس تطور أجور فئة مهنية اجتماعية معينة بين فترتين زمنيتين مختلفتين. ويمكن صياغة رقم قياسي مرجح للأجور بطريقتين:

الطريقة الأولى: الترجيح بواسطة عدد الأفراد المنتمين لفئة مهنية اجتماعية معينة، حيث تكتب العلاقة الإحصائية للرقم القياسي بالشكل التالي:

$$I_{S.t_1/t_0} = \frac{\sum n_0^j \times \frac{S_1^j}{S_0^j}}{\sum n_0^j} .100$$

حيث أن n_0^j يمثل عدد الأفراد أو الأجراء للفئة المهنية الاجتماعية j، أما S_0^j و S_1^j يمثلان على التوالي: أجور الفئة j في فترة الأساس والفترة الحالية أو المدروسة.

الطريقة الثانية: تعتمد أساسا على علاقة لاسبير، وتكتب بالشكل التالي:

$$I_{L.S.t_1/t_0} = \frac{\sum \frac{S_1^j}{S_0^j} \times S_0^j \times n_0^j}{\sum S_0^j \times n_0^j} .100$$

ج- القدرة الشرائية للعملة: (Pouvoir d'achat de la monnaie)

لتحديد القدرة الشرائية للعملة، نقسم وحدة واحدة من هذه العملة على الرقم القياسي لأسعار المواد الاستهلاكية مثلا.

مثال: بلغ الرقم القياسي لأسعار الاستهلاك في بلد ما 190% في شهر جوان 2007، ثم أصبح في شهر جوان سنة 2008 مساويا إلى 198.4% علما أن سنة الأساس هي 2000، والعملة المستعملة هي الدولار. المطلوب تحديد القدرة الشرائية للدولار في سنة 2007 و2008 مقارنة بسنة الأساس؟.

الحل:

- القدرة الشرائية للدولار سنة 2007: $\frac{1\$}{190}.100 = 0.526$ معنى ذلك أن 1$ في سنة 2000 أصبحت قدرته الشرائية في جوان 2007 تساوي 0.526 $.

- نفس الشيء بالنسبة لبقية السؤال.

د- تقييم الأجر الاسمي و تحديد الأجر الحقيقي:

(Evaluation du revenu nominal et détermination du revenu réel)

لتحديد الأجر الحقيقي لفئة اجتماعية- مهنية معينة في فترة ما، نقسم الأجر الاسمي لهذه الفترة على الرقم القياسي لأسعار الاستهلاك.

مثال: نفرض أنه في المثال السابق، أصبح الأجر الاسمي السنوي لعامل ما مساويا إلى$ 20000 سنة 2008، المطلوب تحديد الأجر الحقيقي؟.

الحل: الأجر الحقيقي لسنة 2008 مقارنة بسنة 2000 هو:

$$R.\mathrm{Re}el = \frac{20000}{198.4} \times 1000 = 105596.6 Dollar$$ ، نظرا لارتفاع الأسعار و

انخفاض مستوى المعيشة فإن $ 20000 أصبحت قيمتها الحقيقية سنة 2008 مقارنة بسنة 2000 تساوي $ 10559.66.

لنفرض أن أجر نفس العامل كان يساوي إلى $ 13000 سنة 2000 السؤال المطروح: هل تحسن مستوى معيشة هذا العامل؟.

أولا: نحدد نسبة زيادة الأجر بين سنة2008 و2000:

$$\frac{20000}{13000} \times 100 = 153.846\%$$ نلاحظ أن نسبة الزيادة في الأجر بين الفترتين بلغت 53.846% أما الارتفاع في أسعار الاستهلاك فلقد بلغ نسبة 98.6%، إذن الفرق بين النسبتين يساوي 44.55%، وهذا لا يعني

أن القدرة الشرائية انخفضت بهذه النسبة، ولكن تبين هذه الأخيرة أنه من أجل المحافظة على نفس القدرة الشرائية لسنة الأساس يجب أن يصبح أجر العامل في سنة 2008 مساويا إلى $ 25792 =13000×1.984 ، بناءا على هذه النتيجة فقد هذا العامل ما قيمته $ 5792 نتيجة ارتفاع أسعار مواد الاستهلاك، أي ما نسبته:

$$\frac{5792}{25792}\times 100 = 22.45\%$$

ملاحظة: يمكن أن نصل إلى نفس النتيجة باستعمال الرقم القياسي للقدرة الشرائية، وهو عبارة عن النسبة بين الرقم القياسي للأجر والرقم القياسي لأسعار الاستهلاك:

$$I_{PA} = \frac{I_{S.t_1/t_0}}{I_{P.t_1/t_0}} = \frac{153.846}{198.4}.100 = 77.54\%$$ ،

إذن: $100\% - 77.54\% = 22.45\%$ وهي النسبة المطلوبة.

تمارين تطبيقية للفصل الرابع

التمرين التاسع عشر:

بلغت نسب استهلاك 3 مجموعات من المواد A;B;C من ميزانية الأسرة سنة 1985 كما يلي: 30% ; 20% ; 50%.وفي سنة1986، ارتفعت أسعار المجموعة A بمقدار 15%، وأسعار المجموعة B بـــ: 10%، وبلغ الرقم القياسي لأسعار المجموعة C 114%.

المطلوب ما يلي:

1- ما هو الرقم القياسي المرجح المناسب لسنة 1986مقارنة بسنة 1985؟.

2- إذا علمنا أن الرقم القياسي لأسعار المجموعات الثلاثة كان يساوي 130% سنة 1985مقارنة بسنة 1980، كم تصبح قيمته سنة1986مقارنة بسنة 1980؟.

التمرين العشرون:

قامت مصلحة المحاسبة لمؤسسة ما بإجراء دراسة حول تطور نفقات التوزيع، فكانت النتائج كالتالي:

ج:4.8

الرقم القياسي للأسعار	نفقات التوزيع بالنسبة المئوية %		
سنة الأساس 1991	1/1/1992	1/1/1991	
110	66	60	اليد العاملة
120	24	30	الوقود
105	10	10	التصفيف

المطلوب تحديد الرقم القياسي للأسعار لباش لنفقات التوزيع؟ .

التمرين الواحد والعشرون:

يبين الجدول التالي تطور أجور ثلاث فئات اجتماعية- مهنية:

ج:4.9

S_1^j (90)	n_1^j(90)	S_0^j(89)	n_0^j(89)	الفئة الاجتماعية-المهنية
6852	148	6528	152	عمال
9325	72	8687	68	إطارات متوسطة
12800	20	12528	18	إطارات عليا

المطلوب ما يلي:

1- حدد الرقم القياسي للأجور حسب ترجيح لاسبير؟.

2- حدد الرقم القياسي للأجور حسب ترجيح العدد؟.

التمرين الثاني والعشرون:

كان الأجر الاسمي الأدنى مساويا إلى3000د.ج في سنة 1987، وفي سنة 1996 أصبح مساويا إلى 5000 د.ج، علما أن الرقم القياسي لأسعار كل من الحليب والخبز لسنة 1996/1987 يساوي .975%.

المطلوب ما يلي:

1- ما هو الأجر الحقيقي لسنة 1996 مقارنة بسنة 1987؟.

2- ما هي نسبة تطور مستوى المعيشة؟ .

التمرين الثالث والعشرون:

يبين الجدول التالي تطور أسعار وكميات 4 مواد استهلاكية خلال فترتين حسب ما يبينه الجدول التالي:

ج:4.10

	P_0	q_0	P_1	q_1
المادة الأولى	9	30	15	25
المادة الثانية	11	36	19	40
المادة الثالثة	14	45	23	50
المادة الرابعة	16	60	24	40

المطلوب ما يلي:

1- حساب الرقم القياسي التجميعي للأسعار والكميات؟.

2- تحديد الوسط الحسابي للأرقام القياسية للأسعار؟.

3- تحديد الأرقام القياسية لكل من لاسبير، باش، فيشر، مارشال: للأسعار والكميات؟.

حال تمارين الفصل الرابع

التمرين التاسع عشر:

1- الرقم القياسي المرجح المناسب: هو الرقم القياسي للاسبير، لأن الترجيحات المتوفرة لدينا هي ترجيحات سنة الأساس، وهو عبارة عن الوسط الحسابي للأرقام القياسية، وتكتب علاقته بالشكل التالي:

$$I_{L.P86/85}=\frac{\sum n_i \times x_i}{\sum n_i}=\frac{50\times115+20\times110+30\times114}{20+50+30}=113.7\% .$$

2- لحساب الرقم القياسي للأسعار لسنة 86 مقارنة بسنة 80 نستعمل خاصية التحويل بالشكل التالي:

$$I_{L.P86/80}=\frac{I_{LP86/85}\times I_{LP85/80}}{100}=\frac{112.2\times130}{100}=145.86\% ،$$

السؤال المطروح الآن هو: هل تعتبر هذه النتيجة صحيحة؟.

هذه النتيجة لا تعتبر صحيحة لأن الرقم القياسي لـــ لاسبير لا يحقق خاصية التحويل.

التمرين العشرون:

- تحديد الرقم القياسي لـــباش: لكل وحدة نقدية لنفقات التوزيع يخصص 66% منها لليد العاملة، 24% للوقود و10% للتصفيف. لإيجاد الرقم القياسي لباش نستعمل الوسط التوافقي للأرقام القياسية البسيطة بالقيم

الإجمالية للسنة الحالية، وتكتب العلاقة بالشكل التالي: $I_{PP92/91}=\frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{x_i}}$ ،

حيث أن n_i الترجيحات، x_i الأرقام القياسية البسيطة لأسعار نفقات التوزيع، إذن النتيجة هي كالتالي:

$I_{PP92/91}=\frac{66+24+10}{\frac{66}{110}+\frac{24}{120}+\frac{10}{105}}=111.7\%$ ، مقدار الزيادة يساوي 11.7%.

ملاحظة: تستعمل هذه العلاقة في حالة كون الكميات عبارة عن نسب مجموعها يساوي الواحد أو 100%.

التمرين الواحد و العشرون:

1- تحديد الرقم القياسي للأجور حسب ترجيح لاسبير: قصد تسهيل العمليات الحسابية نضع الجدول التالي:

ج:4.11

الفئة الاجتماعية-المهنية	n_0^j	S_0^j	$C.B=S_0^j.n_0^j$	S_1^j	الرقم القياسي البسيط
عمال	152	6528	992256	6852	104.96
إطارات متوسطة	68	8687	590716	9325	107.34
إطارات عليا	18	12528	225504	12800	102.17
$\sum$	238		1808476		

$$I_{L.S90/89} = \frac{\sum \frac{S_1^j}{S_0^j} \times S_0^j \times n_0^j}{\sum S_0^j \times S_0^j}$$

$$\frac{1.0496 \times 992256 + 1.0734 \times 590716 + 1.0217 \times 225504}{1808476} \times 100 = 105.37\%$$

2- تحديد الرقم القياسي للأجور حسب ترجيح العدد:

$$I_{S90/89} = \frac{\sum n_0^j \times \frac{S_1^j}{S_0^j}}{\sum n_0^j}.100$$

$$I_{S90/89} = \frac{104.96 \times 152 + 107.34 \times 68 + 102.17 \times 18}{238} = 105.428\%$$

التمرين الثاني والعشرون:

1- الأجر الحقيقي: $R.\text{Re}el = \frac{5000}{975}.100 = 512.82 D.A$.

2- نسبة تطور مستوى المعيشة:

أ- نسبة زيادة الأجر: $\frac{5000}{3000}.100 = 166.66\%$، بلغت نسبة زيادة الأجر بين الفترتين إلى66.66%، أما الزيادة في أسعار الاستهلاك فتقدر بـــ:875%، لتحديد نسبة تحسن أو تدهور مستوى المعيشة، نستعمل الرقم القياسي للقدرة الشرائية وهو عبارة عن النسبة بين الرقم القياسي للأجر والرقم القياسي لأسعار الاستهلاك:

$I_{P.A}=\frac{I_{S.t_1/t_0}}{I_{P.t_1/t_0}}=\frac{16666}{975}.100=17.1\%$ ، نلاحظ أن تدهور مستوى المعيشة بلغ ذروته حيث يقدر: $100-17.1=82.9\ \%$.

التمرين الثالث والعشرون:

1- الرقم القياسي التجميعي:

أ- الرقم القياسي التجميعي للأسعار:

$$I_{P.t_1/t_0}=\frac{\sum P_{1i}}{\sum P_{0i}}\times 100=\frac{81}{50}\times 100=162\%$$

ب- الرقم القياسي التجميعي للكميات:

$$I_{q.t_1/t_0}=\frac{\sum q_{1i}}{\sum q_{0i}}.100=\frac{155}{171}.100=90.6\%$$

2- الوسط الحسابي للأرقام القياسية للأسعار:

$$I_{\overline{x}P.t_1/t_0}=\frac{\sum\frac{P_{1i}}{P_{0i}}}{4}.100=\frac{6.5367}{4}.100=163.419\%$$

3- الأرقام القياسية المرجحة:

أ- الرقم القياسي للاسبير:

- الرقم القياسي للأسعار:

$$I_{L.P.t_1/t_0}=\frac{15\times 30+19\times 36+23\times 45+24\times 60}{9\times 30+11\times 36+14\times 45+16\times 60}.100=159.97\%$$

- الرقم القياسي للكميات :

$$I_{q.t_1/t_0} = \frac{25\times9+40\times11+50\times14+40\times16}{30\times9+36\times11+45\times14+60\times16}.100 = 88.87\%$$

ب- الرقم القياسي لباش:

- الرقم القياسي للأسعار:

$$I_{P.P.t_1/t_0} = \frac{15\times25+19\times40+23\times50+24\times40}{9\times25+11\times40+14\times50+16\times40}.100 = 16683\%$$

- الرقم القياسي للكميات:

$$. I_{P.qt_1/t_0} = \frac{25\times15+40\times19+50\times23+40\times24}{30\times15+36\times19+45\times23+60\times24} = 92.68\%$$

ج- الرقم القياسي لفيشر:

- الرقم القياسي للأسعار:

$$. I_{F.P.t_1/t_0} = \sqrt{159.97\times166.83} = 163.36\%$$

- الرقم القياسي للكميات:

$$. \% I_{F.q.t_1/t_0} = \sqrt{88.87\times92.68} = 90.75$$

د- الرقم القياسي لمارشال:

- الرقم القياسي للأسعار:

$$. I_{M.P.t_1/t_0} = \frac{15\times 55+19\times 76+23\times 95+24\times 100}{9\times 55+11\times 76+14\times 95+16\times 100}.100 = 160.85\%$$

- الرقم القياسي للكميات: $I_{M.q.t_1/t_0} = 89.51\%$

الفصل الخامس

الانحدار و الارتباط

Régression & Corrélation

يحتوي هذا الفصل على مدخل في الانحدار والارتباط الخطي البسيط، ويتضمن أساسا على الأدوات الضرورية لدراسة العلاقة بين متغيرين إحداهما تابع والأخر مستقل، مع إمكانية التنبؤ بقيم المتغير التابع وفق قيم المتغير المستقل (إذا بقت نفس الظروف على حالها). ظهرت أول دراسة في مجال الانحدار الخطي من طرف: (Sir Francis Galton : 1822-1911)، وكانت تخص العلاقات الوراثة(العلاقة بين طول قامة الآباء والأبناء)، ثم من طرف (Karl Pearson:1857-1936) في نفس الميدان.

أولا: الانحدار الخطي البسيط (Régression linéaire simple)

تقتصر دراسة الانحدار الخطي البسيط على العلاقة الخطية بين متغيرين فقط، إن كلمة خطي تعني أن نسبة الزيادة في المتغير المستقل (المفسر: بكسر السين) تساوي بالتقريب نسبة الزيادة في المتغير التابع (المفسر: بفتح السين)، أما كلمة بسيط فيقصد بها العلاقة بين متغيرين فقط.

تعبر هذه العلاقة عن تطور ظاهرة معينة (اقتصادية، اجتماعية، بيولوجية...الخ) في مكان أو زمن معين. إن دراسة هذه العلاقة تؤدي إلى صياغة إحصائية على شكل نموذج لهذه الظاهرة، وهذا قصد التنبؤ بقيمها مستقبلا إذا بقيت نفس الظروف على حالها، بحيث أن الظواهر

الاقتصادية والاجتماعية... إلخ، لا تتطور بصفة عفوية وعشوائية بل هناك مسببات تؤدي بها إلى التغير عبر مراحل ووضعيات مختلفة وهذا حسب قوة التأثير. إن لدراسة أية ظاهرة من الظواهر مراحل محددة، تلخص بالشكل التالي:

- تحديد المتغير التابع المدروس.
- تحديد العوامل التي لها علاقة بهذه الظاهرة وترتيبها حسب درجة التأثير.
- اختيار العامل الأكثر تأثيرا وتفسيرا.
- تحديد نوع العلاقة الموجودة بين المتغيرين.
- وضع الصياغة الرياضية لشكل العلاقة (خطية أو غير خطية).
- وضع الشكل النهائي للنموذج بناءا على النماذج الرياضية المعروفة.

حددت النظرية الاقتصادية العوامل المؤثرة في عدة ظواهر نذكر من بينها:

أ- الدخل هو العامل الرئيسي في تحديد استهلاك الأفراد والأسر، ووضعت الصياغة الإحصائية بالشكل التالي: $C = \alpha + \beta.y + u$ حيث أن C الاستهلاك $\alpha;\beta$ معلمات يمكن تقديرها وهي تمثل على التوالي نسبة الدخل المخصصة للاستهلاك والحد الأدنى للاستهلاك، أما u فيمثل بقية العوامل الثانوية المؤثرة في الاستهلاك(الأسعار، حجم الأسرة...الخ) والعوامل غير القابلة للقياس(المتغيرات الكيفية: العادات والسلوك الاستهلاكي...الخ) .

ب- معدل الفائدة هو العامل الرئيسي في تحديد حجم الاستثمار: $I = I_0 + \beta.i$، يمثل i معدل الفائدة.

تعتبر قيم المعلمات α ; β; I_0 مجهولة، هدفنا هو تحديدها اعتمادا على معطيات سابقة للظاهرة المدروسة والعامل الرئيسي المؤثر فيها(المتغير التابع والمتغير المستقل). سنكتفي باستعمال طريقتين لتحديد هذه المعلمات: الطريقة البيانية والطريقة التحليلية وسنركز على هذه الأخيرة لأنها أكثر عملية من الأولى. وقبل التطرق إلى هاتين الطريقتين، نحاول أن نبين نوع العلاقات التي يمكن أن تكون بين المتغيرين المدروسين. وسنركز على الظواهر الاقتصادية-الاجتماعية بالدرجة الأولى.

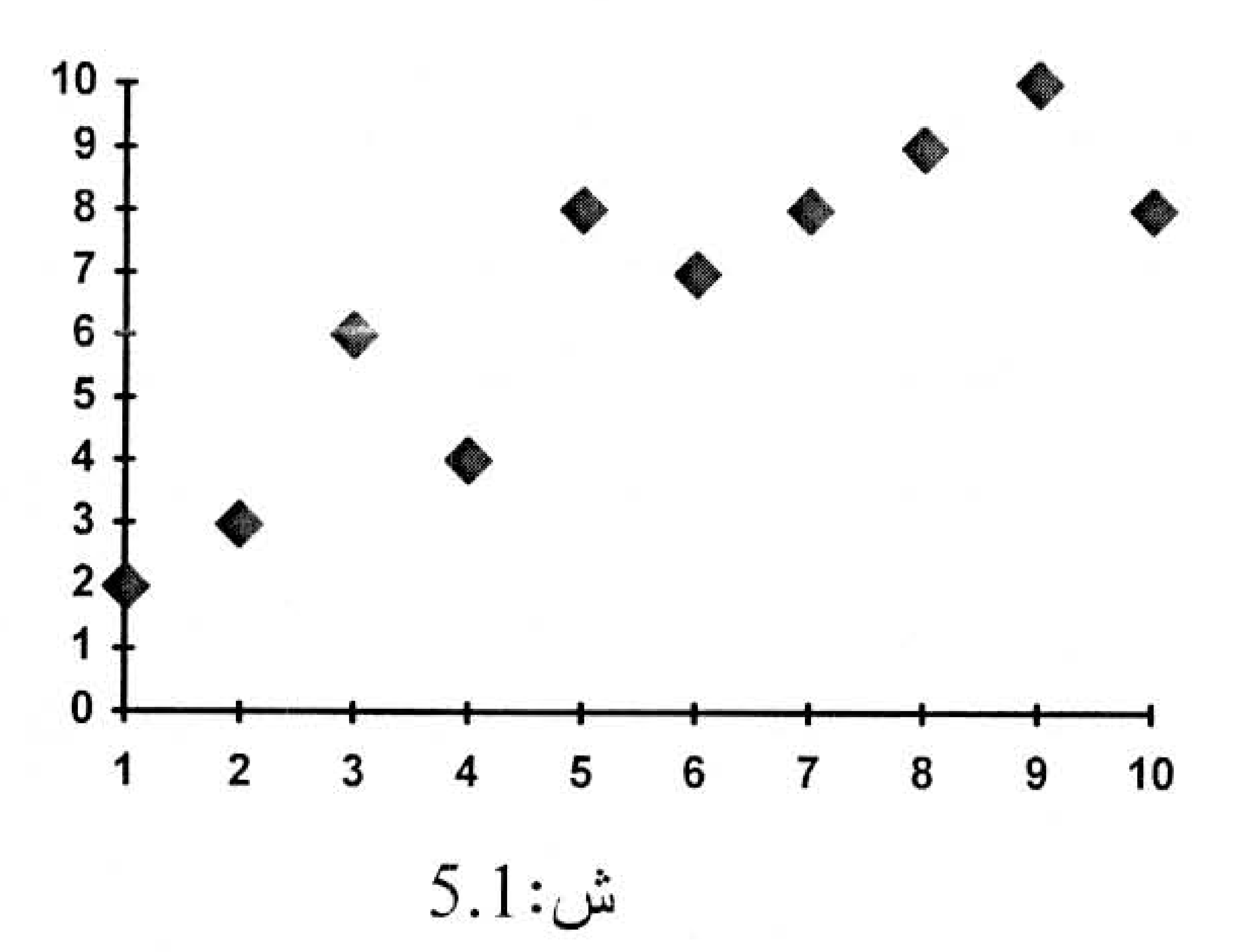
1- نوع العلاقات الموجودة بين المتغير التابع والمستقل:

إن العلاقة التي يمكن أن تكون بين المتغير التابع والمستقل هي إما علاقة خطية أو غير خطية، سنكتفي في هذا الفصل بالعلاقة الخطية فقط، ونحاول عن طريق أمثلة الانتقال من بعض العلاقات غير الخطية إلى العلاقة الخطية. ويقصد بالعلاقة الخطية أن نسبة تغير المتغير التابع تساوي بالتقريب نسبة تغير المتغير المستقل، أي أن سحابة النقاط الممثلة للقيم الحقيقية للمتغيرين تتبع خط مستقيم بالتقريب.

أ- شكل العلاقة الموجودة بين المتغير التابع والمستقل:

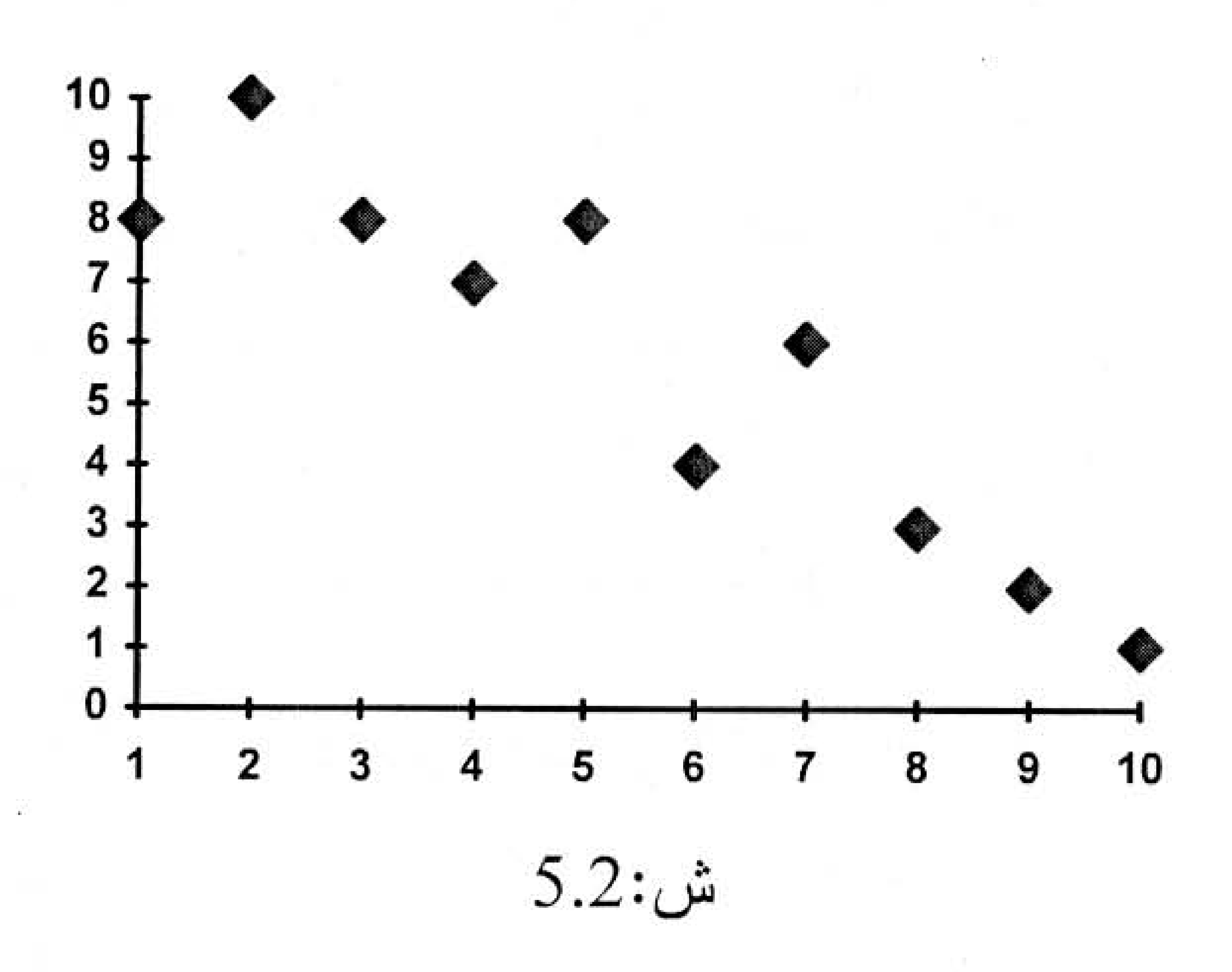
يمكن أن نميز بين ثلاثة حالات:

- **الحالة الأولى:** علاقة خطية طردية: الزيادة في المتغير المستقل تؤدي إلى زيادة في المتغير التابع والعكس صحيح.



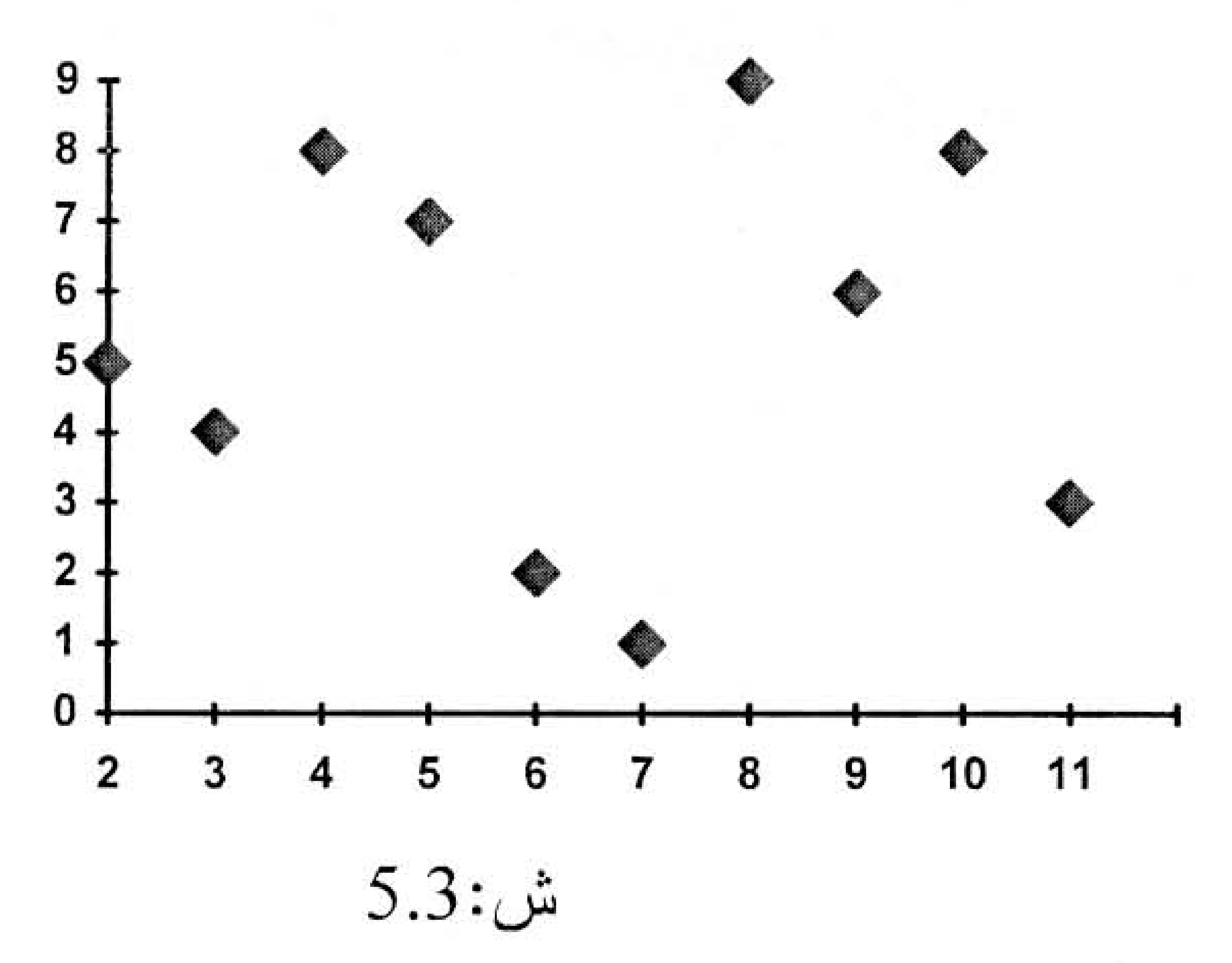
ش:5.1

- **الحالة الثانية:** علاقة خطية عكسية: الزيادة في المتغير المستقل تؤدي إلى الانخفاض في المتغير التابع والعكس صحيح.



ش:5.2

- **الحالة الثالثة:** لا توجد علاقة بين المتغيرين، لأن النقاط مبعثرة ولا يوجد اتجاه واضح لها.



ش:5.3

ملاحظة: يمكـــن أن نحـــدد نوع وشكل العلاقة بين متغيرين انطلاقا من العرض البياني.

ب- طريقة تحديد نوع العلاقة بين المتغيرين:

نفرض أن y_i قيم المتغير التابع، x_i قيم المتغير المستقل:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots .., y_n$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots .., x_n$$

نستعمل النسب التالية لتحديد نوع العلاقة بين المتغيرين:

ثابت

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cong$$

فإذا كانت هذه النسب متساوية أو متقاربة، نقول أن العلاقة بين المتغيرين خطية(طردية أو عكسية)، أما إذا كانت غير ذلك أي متباعدة فنقول أن العلاقة بينها غير خطية.

ج- شروط دراسة العلاقة بين متغيرين:

لدراسة العلاقة بين متغيرين يجب توفر الشروط التالية:

- أن تكون بين الظاهرتين المدروستين علاقة جدلية واضحة.
- أن تكون إحداهما ناتجة و الأخرى مسببة.
- أن تكون الظاهرتان قابلتين للقياس.
- أن تكون كل القياسات المتحصل عليها متقابلة بالنسبة للزمان والمكان أو كلاهما معا.

2- الانحدار: Régression:

وهو إيجاد علاقة أو ترابط أحد المتغيرات بالمتغيرات الأخرى، تسمى الدالة التي تربط بينهم بدالة الإنحدار أو التراجع الخطي البسيط(Regression Lineaire Simple). نكتفي في هذا الفصل بدراسة الشكل الخطي البسيط لهذه العلاقة.

مثال عن مفهوم الانحدار: لاحظ البيولوجيون، عند دراسة طول قامة الآباء والأولاد أنه عندما يكون طول قامة الأب أكبر من المتوسط، فإن طول قامة الابن تكون أقل بقليل من المتوسط، معناه وجود نزعة من طرف الأبناء على الابتعاد عن طول قامة الآباء والتراجع والنزول إلى متوسط أقل.

أ- طرق تحديد العلاقة الخطية البسيطة:

نتبع خطوتين هامتين لصياغة العلاقة النهائية بين متغيرين، تتعلق الأولى بوصف و تحديد نوع المتغيرات التي تدخل في النموذج، وهذا باستعمال الإحصائيات المتوفرة لدينا(مثلا: إذا أرادت إحدى المؤسسات دراسة العوامل التي تدفع المستهلكين إلى اقتناء منتوجها، تحدد المتغير

الأكثر تأثيرا على سلوكهم وأذواقهم)، وتتمثل الخطوة الثانية في تحديد فيما إذا كان التغير في المتغير المستقل يؤدي إلى التغير في المتغير التابع وبنفس الاتجاه أو بالاتجاه المعاكس. ثم ننتقل إلى وضع شكل النموذج مع تقدير معلماته، وفي هذا الصدد نكتفي بطريقتين: البيانية والتحليلية.

- **الطريقة البيانية:(Méthode graphique)** نقوم بتمثيل وعرض البيانات الإحصائية المتعلقة بالمتغيرات المدروسة بيانيا، فنلاحظ في الأخير أننا تحصلنا على كوكبة أو سحابة من النقاط، فشكل هذه الأخيرة هو الذي يمكننا من تقريبه إلى أحد الأشكال الرياضية المعروفة(بناءا على معرفة الباحث بالأشكال والنماذج الرياضية). تتحصل في أغلب الأحيان على كوكبة مستطيلة من النقاط، إن هذه الاستطالة تعني وجود علاقة خطية(طردية أو عكسية)، وتتحصل في حالات أخرى على أشكال مختلفة أخرى.

يهم في هذا الفصل الشكل المستطيل من النقاط والذي يقع بالتقريب على استقامة واحدة ففي هذه الحالة، نلاحظ أن الشكل الرياضي المناسب هو الخط المستقيم، ولوضع هذا الخط لابد من توفر شرطان أساسيان:

أولا: يجب أن يمر هذا المستقيم على النقطة المركزية $(\overline{x}\ ,\overline{y})$.

ثانيا: يجب أن تكون المسافات التي تفصل بين نقاط الكوكبة و نقاط الخط المستقيم أصغر ما يمكن.

تتطلب الطريقة البيانية دقة كبيرة يصعب علينا بلوغها، لتحديد المسافات السابقة ولتقدير معلمات النموذج، وبالتالي ننتقل إلى طريقة عملية تسمى بالطريقة التحليلية.

– **الطريقة التحليلية:(Méthode Analytique):** تسمى هذه الطريقة بطريقة المربعات الصغرى: (La méthode des moindres carrés)

نتبع نفس خطوات وشروط الطريقة البيانية، لنصل إلى الشرط المتعلق بالمسافات التي تفصل بين نقاط الكوكبة والنقاط التي تقع على الخط المستقيم، فمجموع هذه المسافات أو الفروق يكون في بعض الأحيان مساويا إلى الصفر، وتفاديا لهذه النتيجة، نستعمل مربعات هذه المسافات أو الفروق.

تنصص طريقة المربعات الصغرى بأن يكون مجموع مربعات هذه الفروق أصغر ما يمكن، ومن هنا جاء ت تسمية هذه الطريقة، وتكون هذه الطريقة صالحة في حالة النماذج الخطية البسيطة.

نفرض أن النموذج الخطي البسيط يكون بالشكل التالي:

$$y_i = a + b \cdot x_i + u_i$$

y_i : قيم المتغير التابع أو القيم الحقيقية للظاهرة المدروسة.

x_i :المتغير المفسر أو المستقل.

a ،b : معلمات النموذج الخطي البسيط.

u_i :مقدار الخطأ أو الفرق بين القيم الحقيقية التي تشكل نقاط الكوكبة والقيم المقدرة التي تقع على الخط المستقيم. ويسمى هذا المتغير بالمتغير العشوائي والذي يمثل جميع العوامل الأخرى التي تؤثر في المتغير التابع والتي لم تؤخذ بعين الاعتبار.

نرمز لقيم المتغير التابع التي تقع على الخط المستقيم والتي تسمى بالقيم المقدرة بالرمز $\hat{y}_i$.

ويمكن كتابة الفرق بين القيم الحقيقية والقيم المقدرة بالشكل التالي:

$$\cdot u_i = y_i - \hat{y}_i$$

يتمثل مبدأ طريقة المربعات الصغرى البسيطة في تقدير المعلمات $a \cdot b$ بشرط أن يكون مجموع مربعات الفروق أصغر ما يمكن، ويكتب هذا الشرط بالشكل التالي:

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum u_i^2 = \min$$

يمر التابع $f(a \cdot b)$ بنهايته الصغرى عند تساوي المشتقتان الجزئيتان لهذا التابع بالنسبة للمعلمتين $a \cdot b$ إلى الصفر:

$$\frac{\partial f(a \cdot b)}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial f(a \cdot b)}{\partial b} = 0$$

نشتق المقدارين الأول والثاني بالشكل التالي:

$$\frac{\partial f(a \cdot b)}{\partial a} = \frac{\partial \sum (y_i - a - b\, x_i)^2}{\partial a} = -2\sum (y_i - a - b\, x_i) = 0$$

$$\frac{\partial f(a \cdot b)}{\partial a} = \sum (y_i - a - b\, x_i) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial f(a \cdot b)}{\partial b} = \frac{\partial \sum (y_i - a - b\, x_i)^2}{\partial b} = -2\sum x_i (y_i - a - b\, x_i) = 0$$

$$\frac{\partial f(a \cdot b)}{\partial b} = \sum x_i (y_i - a - b\, x_i) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

من هاتين المعادلتين نستخرج قيمة كل من b، a:

- من المعادلة الأولى نستخرج قيمة a بدلالة b:

$$\sum y_i - \sum a - b \sum x_i = 0 \Rightarrow \sum y_i - n\,a - b \sum x_i = 0$$

نقسم الطرفين على n لتتحصل على a بدلالة b:

$$a = \frac{\sum y_i}{n} - b\,\frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

أما من المعادلة الثانية نستخرج معامل الانحدار b:

$$\sum x_i (y_i - a - b\,x_i) = \sum x_i\,y_i - a \sum x_i - b \sum x_i^2 = 0$$

نقسم الطرفين على n :

$$\frac{\sum x_i y_i}{n} - a\,\frac{\sum x_i}{n} - b\,\frac{\sum x_i^2}{n} = 0$$

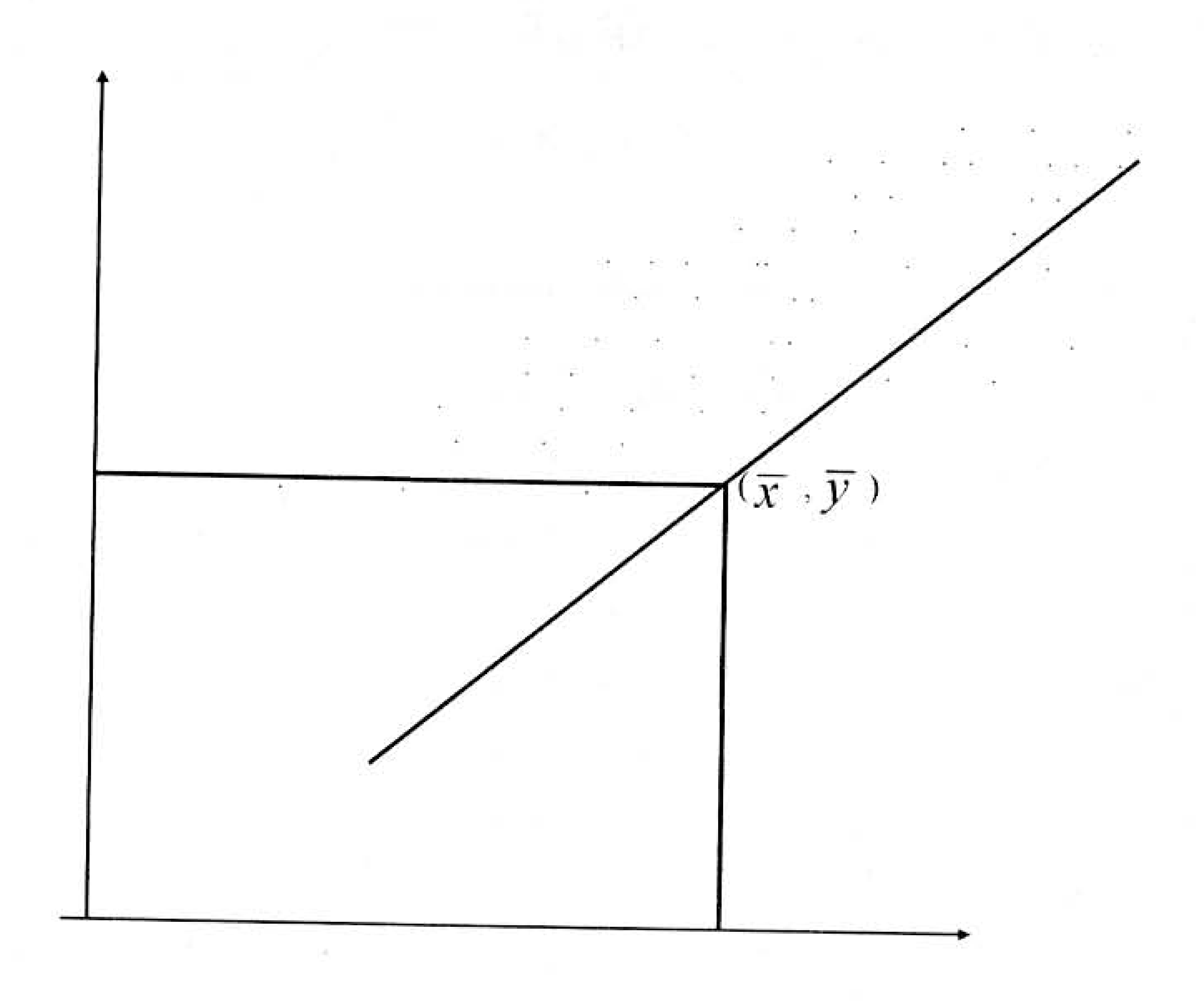
نعوض بقيمة a:

$$\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y} + b\,\bar{x}^2 - b\,\frac{\sum x_i^2}{n} = 0$$

$$b = \frac{\dfrac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

ملاحظة:

تبين المعادلة الثالثة أن المستقيم الذي يمثل كوكبة النقاط(القيم الحقيقية للمتغيرين) لابد أن يمر من النقطة $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ حسب الشكل التالي:



ش:5.4

بعض فرضيات النموذج الخطي البسيط:

1- يجب أن تكون العلاقة خطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

2- يجب أن يكون قياس المتغيرين بدقة وبدون خطأ.

3- متوسط الخطأ يساوي إلى الصفر $\bar{\mu} = 0$.

4- تباين الخطأ مستقل عن الزمن $V(\mu_t) = \delta^2, \forall t$ أو ثبات تباين أو تشتت الخطأ أو بما يسمى بتجانس تباين الخطأ (Homoscédasticité).

5- عدم وجود إرتباط ذاتي(Auto corrélation) بين الأخطاء، معناه أن التباين المشترك بين الأخطاء معدوم:

$$\operatorname{cov}(\mu_t, \mu_s) = 0, \forall t, s : t \neq s .$$

6- الخطأ أو المتغير العشوائي يتبع التوزيع الطبيعي.

مثال: يبين التوزيع التكراري التالي العلاقة بين استهلاك الكهرباء x_i ومردودية العامل y_i في 10 معامل خلال سنة معينة:

ج:5.1

رقم المعمل	y_i	x_i
1	2	6
2	3	6.1
3	6	6.8
4	4	7.2
5	2	7.4
6	3	7.9
7	4	8.2
8	5	8.5
9	6	8.9
10	8	9.1

المطلوب ما يلي:

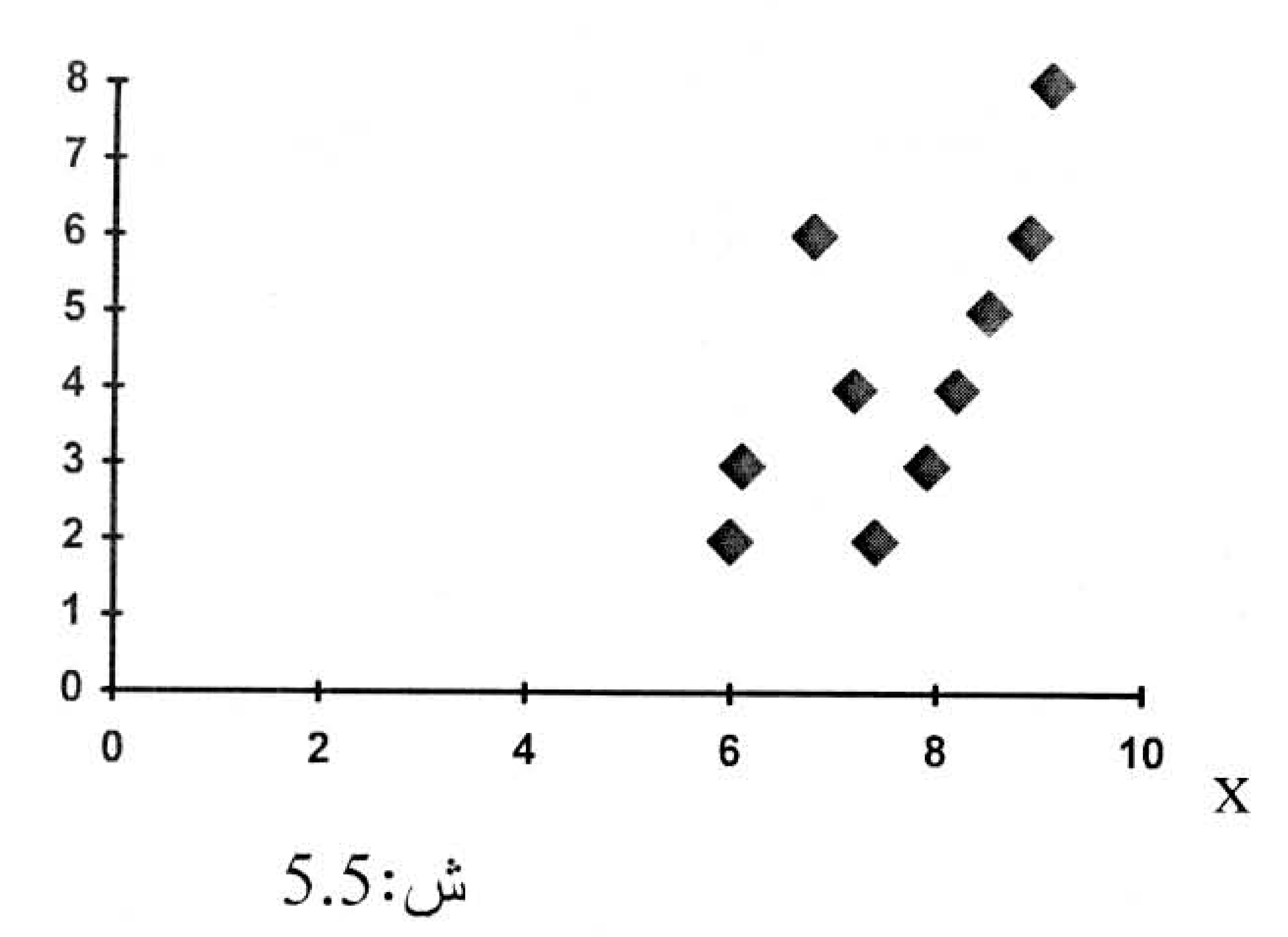
1- ما هو شكل العلاقة بين مردودية العامل و استهلاك الكهرباء؟.

2- نفرض أن العلاقة خطية بين المتغيرين: قدر معلمات النموذج الخطي البسيط؟.

3- ما هي قيمة المردودية عندما يبلغ استهلاك الكهرباء 11 وحدة؟.

الحل:

1- لتحديد العلاقة بين مردودية العامل وإستهلاك الكهرباء، نقوم بوضع العرض البياني المناسب:



ش:5.5

نلاحظ أن كوكبة النقاط تأخذ مسار خطي متزايد ، بناءا على هذا المسار، يمكن تقريب العلاقة بين المتغيرين إلى علاقة خطية وطردية .

2- تقدير معلمات النموذج فرضا أن العلاقة خطية بين المتغيرين:

$$y_i = a + b \cdot x_i + u_i$$

- أولا: نحدد الوسط الحسابي للمتغيرين:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{76.1}{10} = 7.61$$

$$\overline{y} = \frac{\Sigma y_i}{n} = \frac{43}{10} = 4.3$$

- ثانيا : تحديد معامل الانحدار:

$$b = \frac{\frac{\Sigma x_i \cdot y_i}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\frac{\Sigma x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \frac{\frac{339.9}{10} - 4.3 \times 7.61}{\frac{589.97}{10} - 57.91} = \frac{12.67}{10.849} = 1.1678$$

- ثالثا: تحديد الثابت a:

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 4.3 - 1.1678 \times 7.61 = -4.587$$

- رابعا: كتابة معادلة الانحدار: $\hat{y}_i = -4.587 + 1.1678.x_i$.

3- المردودية عندما يبلغ مستوى استهلاك الكهرباء 11 وحدة:

$$\hat{y}_i = -4.587 + 1.1678 \times 11 = 8.25$$

ملاحظة:

يستعمل النموذج الخطي البسيط المتحصل عليه في عملية التنبؤ بقيم المتغير التابع، بشرط أن تبقى نفس الظروف على حالها. إذن يمكن أن نحدد مردودية العامل عند أي مستوى من استهلاك الكهرباء.

والتفسير الاقتصادي لهذا النموذج هو كالتالي: تبين العلاقة الانحدارية أن x_i يؤثر في y_i بالشكل التالي: كلما أزداد x_i بوحدة واحدة فإن y_i يزداد بـــ 1.1678 وحدة، إذن كلما كان معامل الانحدار كبيرا كلما أصبحت العلاقة بين المتغيرين قوية.

توضيح: لا يمكن تحديد مردودية العامل عند أي مستوى من إستهلاك الكهرباء بل عند مستويات محدودة، لأن هناك قيود تحد من ذلك، مثلا قيد الإشباع، فعندما يصل إستهلاك الكهرباء إلى مستوى معين فإن المردودية لا يمكن أن تزداد مهما أرتفع الاستهلاك. إن اختيار المتغير المستقل الأكثر أهمية له دور كبير في تحديد وإعطاء قيم أكثر دقة للتنبؤات.

ثانيا: الانتقال من الانحدارات غير الخطية إلى الانحدار الخطي

Passage de la forme non linéaire à la forme linéaire

يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى على النماذج غير الخطية بعد الانتقال من العلاقة غير الخطية إلى العلاقة الخطية بين المتغيرين بواسطة النماذج اللوغارتمية أو نصف اللوغارتمية، و سنتطرق إلى بعض الحالات.

الحالة الأولى: النموذج نصف اللوغارتمي

ننتقل في هذه الحالة من أحد الأشكال الأسية إلى الشكل النصف اللوغارتمي، وليكن مثلا $y_i = \beta.\alpha^{x_i}$ لتقدير معلمات هذا النموذج ننتقل أولا إلى الشكل الخطي بضرب الطرفين في اللوغارتم:

$\log y_i = \log\beta + x_i \log\alpha$ نلاحظ أن المعطيات الأصلية تتحول إلى قيم لوغارتمية قصد تقدير لوغارتمات المعلمات، وبعد الانتهاء من هذه العملية، نعود إلى النموذج الأصلي بوضع القيم الأصلية للمعلمات المقدرة.

مثال: الوحدات الإحصائية التي تشكل مجتمعا معينا معرفة بالخاصيتين المبينتين في الجدول التالي:

ج:5.2

x_i	1	3	4	6	7	8	9
y_i	2.6	4.6	5.4	9.8	12.3	16.3	21.2

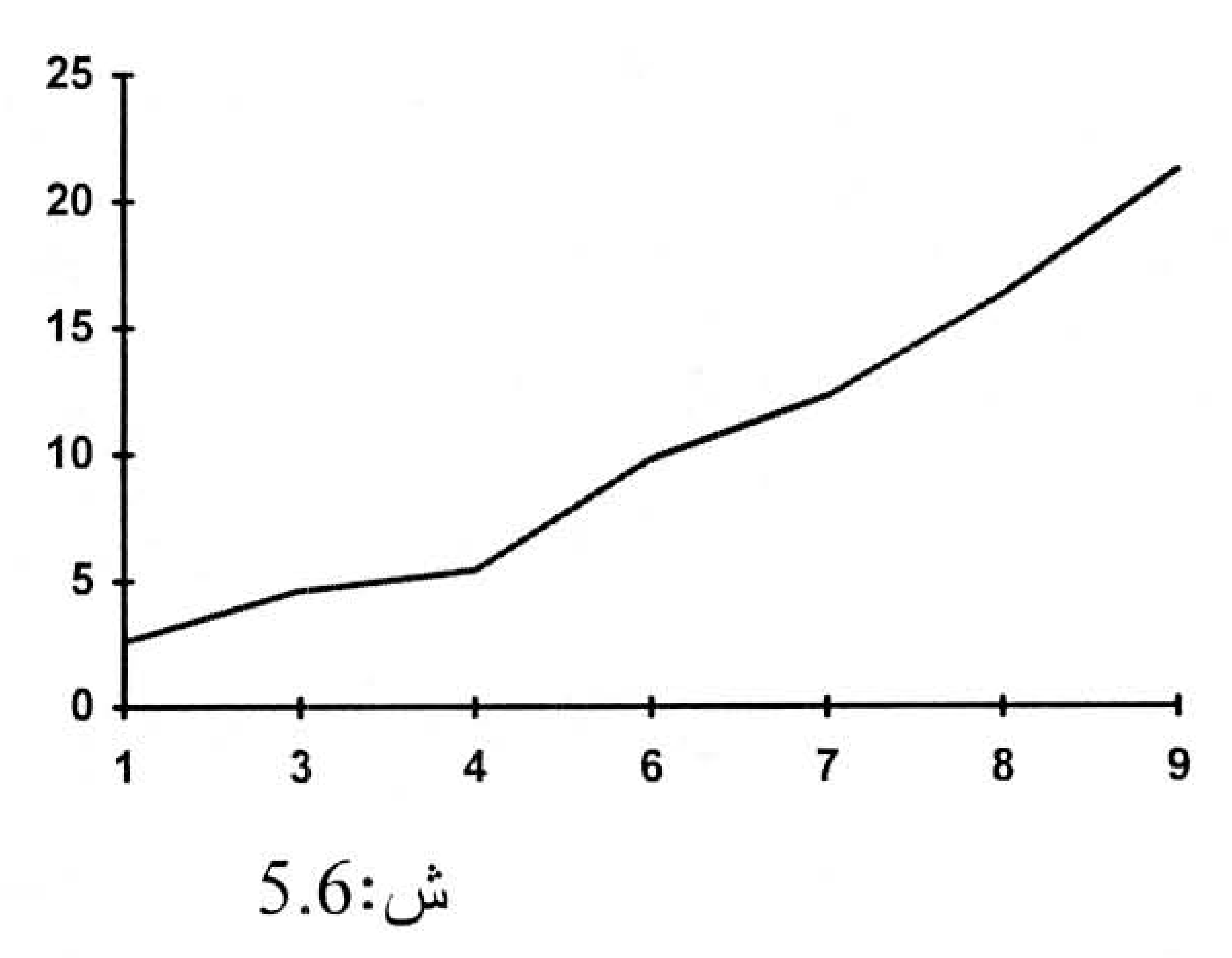
المطلوب ما يلي:

1- تحديد شكل العلاقة الموجودة بين y_i ،x_i ؟.

2- تقدير معلمات النموذج المتحصل عليه؟

الحـــل:

1- نحدد شكل العلاقة بين المتغيرين من خلال العرض البياني:



ش:5.6

نلاحظ من خلال العرض البياني أن الشكل الرياضي الذي يمكن إعطاؤه للعلاقة الموجودة بين المتغيرين هو $y_i = \beta.\alpha^{x_i}$ وهو عبارة عن نموذج أسي يمكن تحويله إلى نموذج نصف لوغارتمي.

2- تقدير α و β:

أولا: ننتقل من الشكل غير الخطي إلى الشكل الخطي:

$\log y_i = \log\beta + x_i \log\alpha$ ، بالنسبة لهذا الشكل تتحول قيم Y فقط:

ج:5.3

x_i	1	3	4	6	7	8	9
$\log y_i$	0.414	0.662	0.732	0.991	1.089	1.212	1.326

ثانيا: بعد إجراء هذا التحويل، يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى لتقدير المعلمات: نضع $z = \log y_i , a = \log \beta , b = \log \alpha$

- تقدير معامل الانحدار:

$$b = \frac{\Sigma x_i z_i - \bar{x} \cdot \bar{z}}{\Sigma x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} = \frac{40.528 - 7 \times 5.428 \times 0.918}{256 - 7 \times 29.46} = \frac{5.647}{49.7577} = 0.1135$$

$$b = 0.1135 = \log\alpha \Rightarrow \alpha = 10^{0.1135} = 1.3$$

- تقدير الثابت a:

$$a = \bar{z} - b \cdot \bar{x} = 0.918 - 0.1135 \times 5.428 = 0.302 \Rightarrow \beta = 10^{0.302} = 2$$

- كتابة النموذج الأصلي: $y_i = 2(1.3)^{x_i}$.

ملاحظة:

يمكن استعمال هذا النموذج للتنبؤ بقيم المتغير التابع عند مستويات معينة لقيم المتغير المستقل.

الحالة الثانية: النموذج اللوغارتمي

في هذه الحالة، نأخذ لوغرتمات قيم المتغير التابع والمستقل.

مثال: يبين الجدول التالي الكميات المطلوبة y_i لمادة معينة بدلالة سعرها x_i.

ج:5.4

x_i	70	105	123	185	220	240	260	280
y_i	90	44	27	12	9	7	4	2

المطلوب ما يلي:

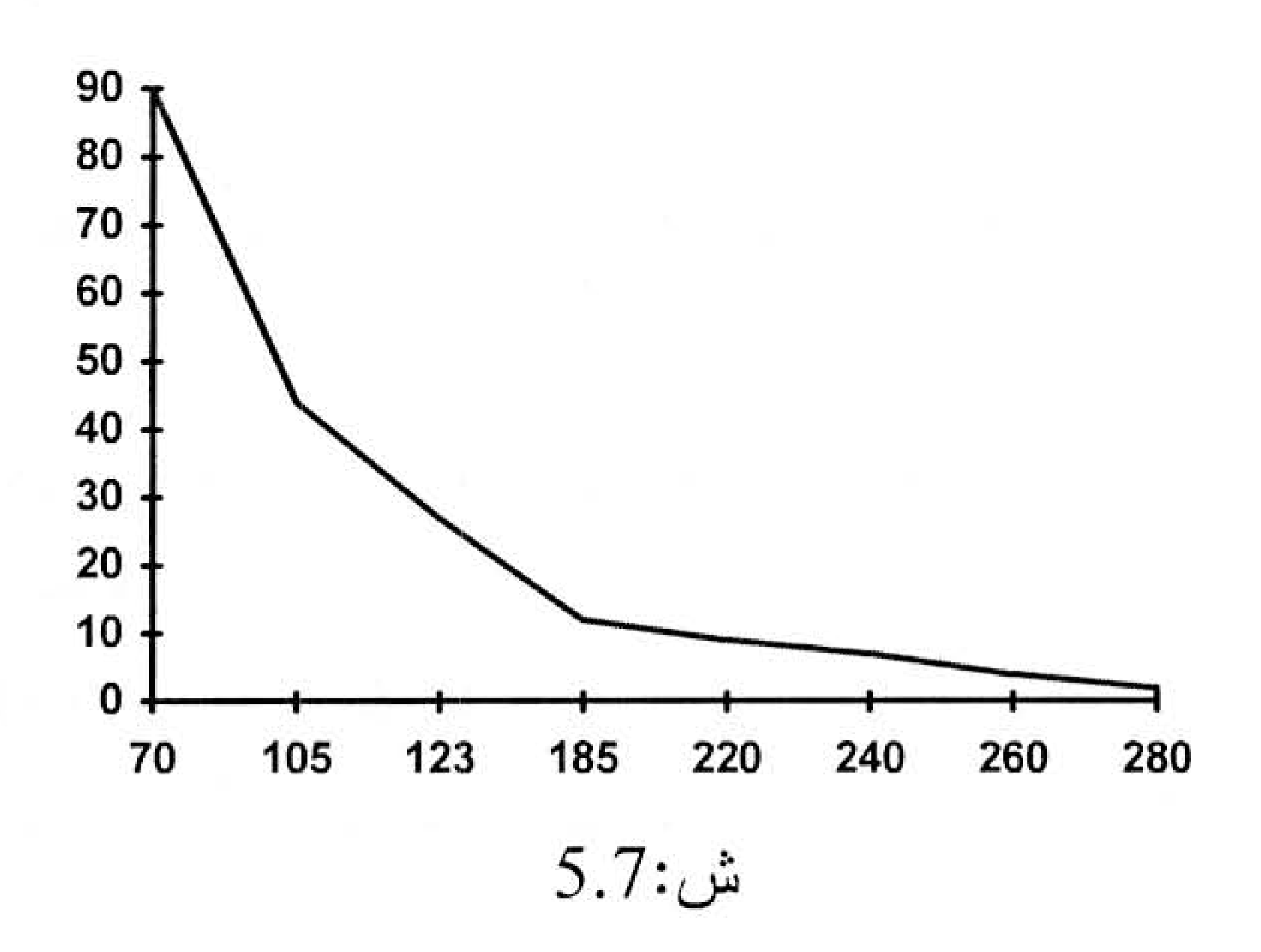
1- تحديد شكل العلاقة بين الكميات المطلوبة و السعر؟.

2- تقدير معلمات النموذج؟.

3- قدر الكميات المطلوبة عند $x_i = 60$ ؟.

الحل:

1- تحديد شكل العلاقة بين المتغيرين بيانيا:



ش:5.7

نلاحظ من العرض البياني أن العلاقة بين الكميات المطلوبة وسعرها هي علاقة غير خطية وعكسية. انطلاقا من الأشكال الرياضية المعروفة، يمكن تقريب الشكل المتحصل عليه إلى الشكل التالي:

$$y_i = \frac{\beta}{x^{\alpha}_i}.$$

2- تقدير معلمات النموذج:

أولا: الانتقال من الشكل غير الخطي إلى الشكل الخطي:

$$\log y_i = \log\left(\frac{\beta}{x_i^{\alpha}}\right) = \log\beta - \alpha\log x_i$$

نضع: $\log x_i = v_i, \log y_i = z_i, \log\beta = a, -\alpha = b$

وبالتالي يمكن كتابة الشكل الخطي للعلاقة السابقة بالشكل التالي :

$$z_i = a + b \cdot v_i$$

ثانيا: لتقدير المعلمات نضع جدول الحسابات التالي:

ج:5.5

v_i	z_i	v_i^2	$\sum v_i \cdot z_i$
1.84	1.95	3.4	3.6
2.02	1.64	4.08	3.31
2.089	1.43	4.367	2.98
2.267	1.079	5.14	2.44
2.34	0.95	5.48	2.22
2.38	0.84	5.66	1.99
2.41	0.6	5.83	1.44
2.44	0.3	5.98	0.734
		39.93	18.736

– تقدير معامل الانحدار:

$$\cdot b = \frac{18736 - 8 \times 2.22 \times 1.1}{39.93 - 8 \times 4.93} = \frac{-0.7995}{0.3561} = -2.245$$

– تقدير الثابتβ:

$$\log \beta = a = 1.1 - (-2.245) \times 2.22 = 6.08 \Rightarrow \beta = 121310949$$

– كتابة النموذج الأصلي:

$$\cdot \ y_i = \frac{\beta}{x_i^{\alpha}} = \frac{121310949}{x^{2.245}}$$

3– تقدير الكميات المطلوبة عند $x_i = 60$:

$$\cdot y_i = \frac{1213109.49}{9816.33} \cong 123$$

ثالثا: الارتباط: Corrélation

تطرقنا في الفقرة السابقة إلى الطريقة البيانية والتحليلية لتحديد نوع وشكل العلاقة الموجودة بين متغيرين، وركزنا أساسا على الطريقة التحليلية التي تعتمد على تقنيات طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير معلمات النموذج الخطي البسيط. ولكن المسألة التي تواجهنا الآن هي اختيار المتغير المستقل الأكثر تفسيرا للمتغير التابع(أي المتغير الأكثر ارتباطا مع المتغير التابع)، لتحديد درجة قوة هذا الارتباط، سنقف عند نوعين من الارتباط، يخص النوع الأول المتغيرات الكمية(القابلة للقياس)، ويتعلق النوع الثاني بالمتغيرات الكيفية(غير القابلة للقياس).

النوع الأول: الإرتباط الخطي البسيط Corrélation linéaire simple

- **معامل الارتباط:** هو عبارة عن الوسط الهندسي لمعاملي معادلتي خطي الانحدار: $x_i = f(y), y_i = f(x)$، ويبين هذا المعامل قوة العلاقة الخطية بين متغيرين أحدهما تابع والأخر مستقل، وهو مستقل عن وحدة القياس التي تقاس بها الظاهرة المدروسة، ويرمز له بالرمز r.

نفرض أن معادلتي خطي الانحدار هي كالتالي:

$y_i = a_1 + b_1 \cdot x_i , x_i = a_2 + b_2 \cdot y_i$ حيث أن b_1 , b_2 هما معاملي معادلتي خطي الانحدار، ويكتب معامل الارتباط بالشكل التالي:

$r = \sqrt{b_1 \times b_2}$، وبالتعويض بقيمة المعاملين تتحصل على ما يلي:

$$b_1 = \frac{\Sigma x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} ; b_2 = \frac{\Sigma x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\Sigma y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2}$$

$$r = \sqrt{b_1 \cdot b_2} = \sqrt{\frac{\Sigma x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2} \times \frac{\Sigma x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\Sigma y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2}} =$$

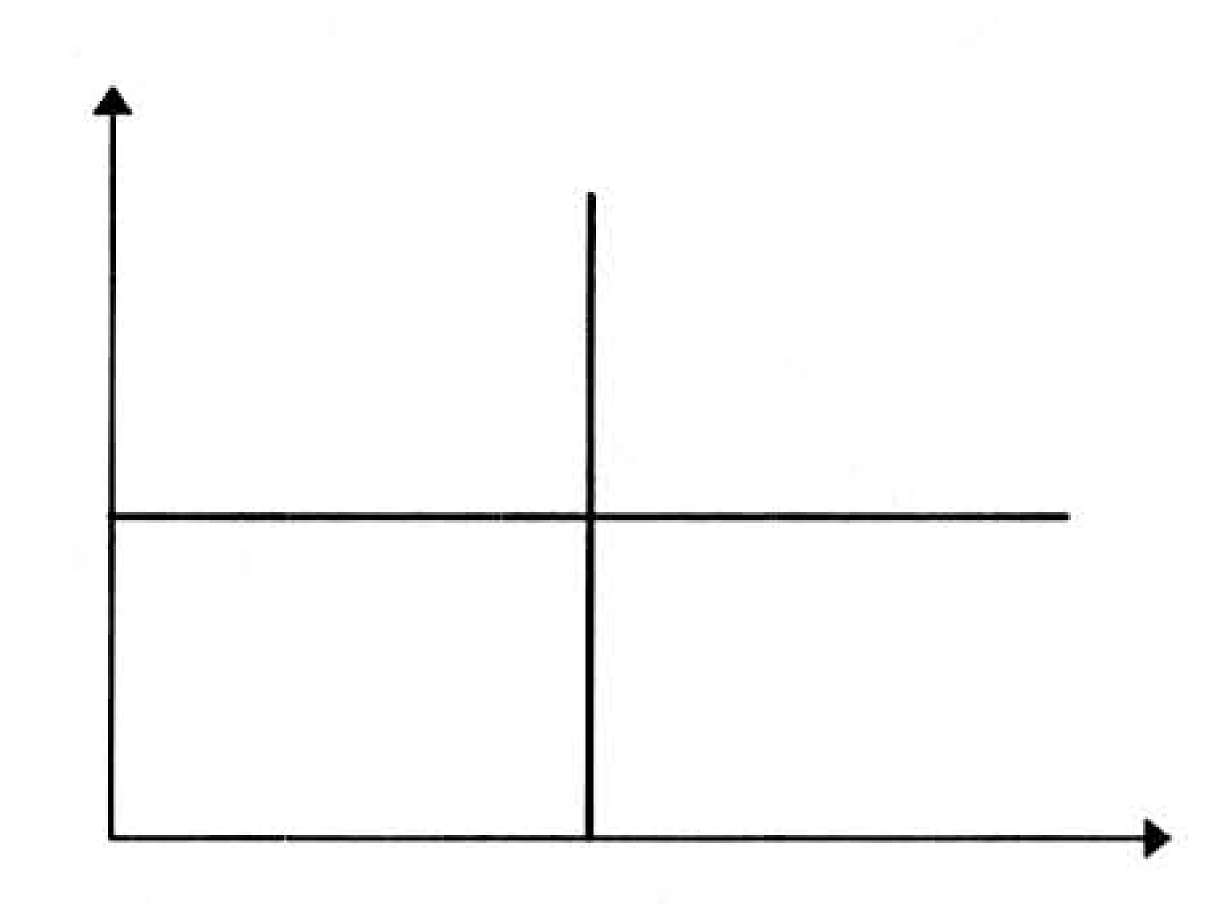
$$r = \frac{\Sigma x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\Sigma x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2)(\Sigma y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2)}} = \frac{COV(x, y)}{SD_x \times SD_y}$$

من العلاقة الأخيرة يمكن إعطاء تعريف أخر لمعامل الإرتباط:
وهو عبارة عن النسبة بين التباين المشترك وجداء الإنحراف المعياري لكل من المتغير الأول والثاني.

أهم خصوصيات معامل الإرتباط:

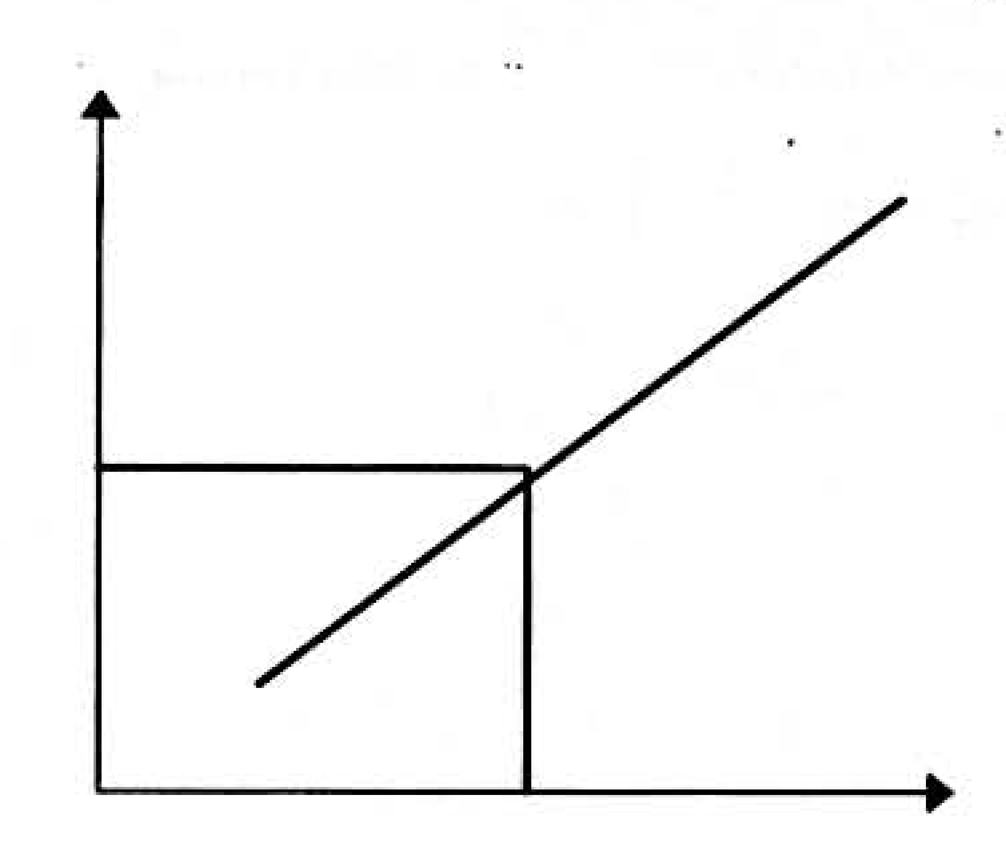
نرتكز في قياس وتفسير معامل الارتباط على معادلتي خطي الانحدار، حسب الحالات التالية:

- **الحالة الأولى:** عندما يكون خطي الإنحدار $f(x_i).f(y_i)$ متعامدين، فإن سحابة النقاط الممثلة للقيم الحقيقية تكون مبعثرة جدا ولا يوجد أي إتجاه لها، ففي هذه الحالة لا توجد أية علاقة بين المتغيرين، معناه وجود ارتباط معدوم $r = 0$، و ذلك وفق العرض البياني التالي:



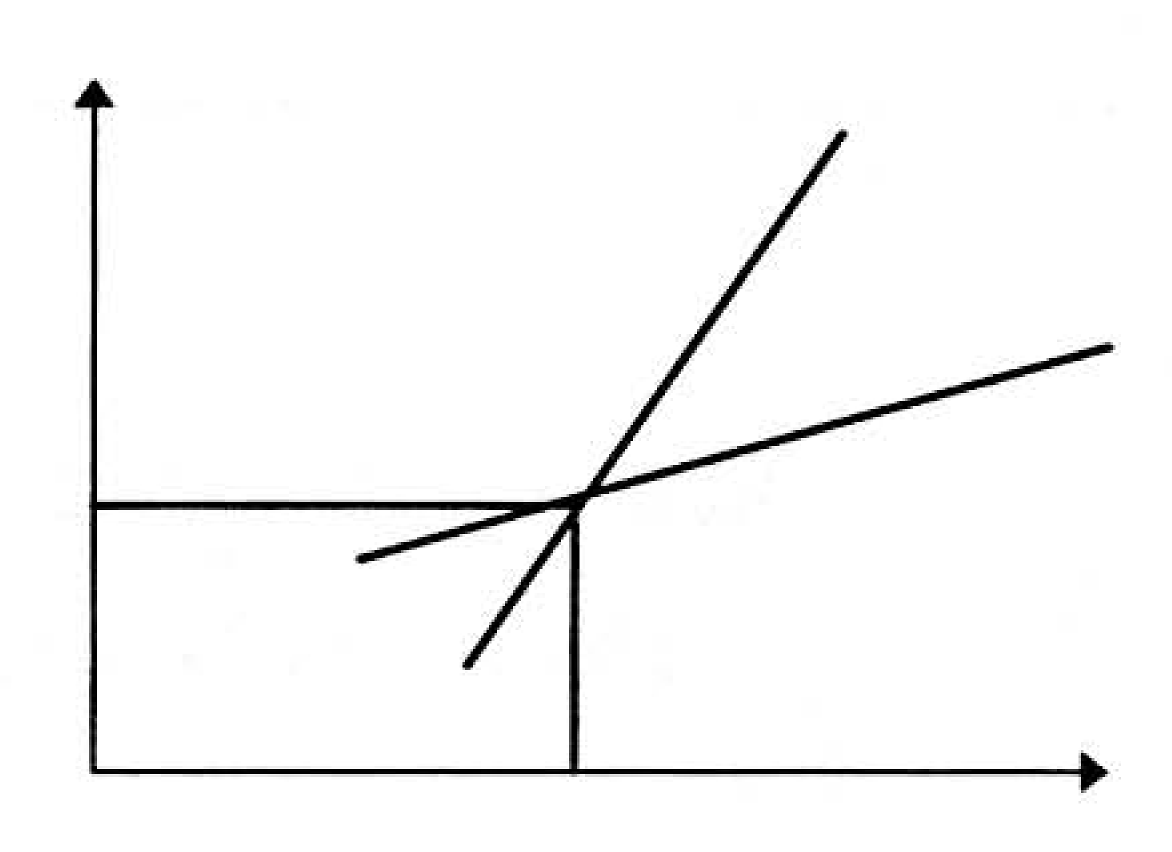
ش:5.8

- **الحالة الثانية:** وجود تطابق بين خطي معادلتي الانحدار $f(x_i).f(y_i)$ في هذه الحالة تكون النقاط الحقيقية لقيم $f(x_i).f(y_i)$ على استقامة واحدة، معناه توجد علاقة قوية(ارتباط تام) بين المتغيرين.



ش:5.9

- **الحالة الثالثة:** يكون تقاطع خطي معادلتي الانحدار $f(y_i)$, $f(x_i)$ زاوية حادة، وتقع هذه الحالة بين الحالتين السابقتين، وتعتبر من الحالات العادية والأكثر واقعية. وتنتمي قيم معامل الارتباط إلى المجال $r \in]-1,+1[$ ، و ذلك حسب الشكل التالي:



ش:5.10

نتيجة:

- عندما يكون $r=0$: ارتباط معدوم(لا توجد علاقة بين المتغيرين).
- عندما يكون $r\in]-1,+1[$: وجود ارتباط نسبي(وجود علاقة نسبية عكسية أو طردية).
- عندما يكون $r=\pm1$: وجود ارتباط تام(وجود علاقة تامة عكسية أو طردية).

مثال: يبين الجدول التالي قيمة الأصول والأرباح السنوية لخمسة مؤسسات بملايين الدينارات:

ج:5.6

المؤسسات	1	2	3	4	5
الأصول X	10	20	30	40	50
الأرباح Y	1	3	2	5	4

المطلوب مايلي:

1- حدد معلمات النموذج الخطي البسيط؟.

2- حدد معامل الإرتباط؟ ماذا تلاحظ؟.

الحل:

1- تحديد معلمات النموذج الخطي البسيط: $y_i=a+b\cdot x_i+u_i$

$$\bar{y}=3, \bar{x}=30, v(y_i)=2, v(x_i)=200, \mathrm{cov}(x_i,y_i)=16$$

$$b = \frac{\text{cov}(x_i, y_i)}{v(x_i)} = \frac{16}{200} = 0.08;$$

$$a = 3 - 0.08 \times 30 = 0.6$$

$$\hat{y}_i = 0.6 + 0.08 x_i$$

2- تحديد معامل الإرتباط:

$r = \frac{16}{\sqrt{200} \times \sqrt{2}} = 0.8$، نلاحظ أن العلاقة قوية بين الأصول والأرباح أي أن الأرباح متعلقة بالأصول نسبيا.

سؤال: ما هو الفرق بين العلاقة الانحدارية والعلاقة الإرتباطية؟

- **العلاقة الانحدارية:** نفرض أن لدينا العلاقة التالية $y_i = a + b \cdot x_i + u_i$ ، $y_i = a + b \cdot x_i + u_i$ نقول أن العلاقة بين y_i و x_i هي علاقة انحدارية إذا كان المتغير المستقل يفسر المتغير التابع أو إذا كان تغير قيم المتغير المفسر يؤدي إلى تغير قيم المتغير التابع(Problème de régression).
- أما عندما لا يمكن أن نميز بين متغيرين ولا يمكن تحديد بصفة واضحة المتغير التابع والمتغير المستقل نكون في حالة مسألة إرتباطية (Problème de corrélation).

توضيح:

يمكن استعمال القيم المعيارية للمتغيرات المدروسة لقياس الارتباط الخطي، والقيمة المعيارية هي عبارة عن النسبة بين أي فرق لقيم المتغير الإحصائي بالنسبة للوسط الحسابي ومتوسط هذا الفرق (الانحراف

المعياري) وتكتب بالشكل التالي: $\frac{x_i - \bar{x}}{SD_X};\frac{y_i - \bar{y}}{SD_Y}$، ولقياس درجة الإرتباط بينهما نستعمل متوسط جداء هذه القيم:

$$r = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n \cdot SD_X \cdot SD_Y} \cdot$$

النوع الثاني: معامل الإرتباط الرتبي (Coefficient de Corrélation de Rang)

يستخدم معامل الارتباط ألرتبي لدراسة الارتباط في حالة متغيرات كيفية، حيث تستعمل رتبا تصاعدية أو تنازلية عوضا عن القيم العددية للمتغيرات المدروسة. فإذا كان الترتيب التصاعدي للمتغير المستقل يرافقه ترتيب تصاعدي للمتغير التابع نقول أن الارتباط موجب (علاقة طردية)، أما إذا كان الترتيب التصاعدي للمتغير المستقل يرافقه ترتيب تنازلي للمتغير التابع نقول أن الارتباط بين المتغيرين سالب (علاقة عكسية).

- **قياس الإرتباط الرتبي**: لقياس الارتباط ألرتبي بين مفردات المتغير التابع والمستقل نرتب كليهما حسب أهمية خصائصهما ثم نحسب مجموع مربعات الفروق بين كل الرتب المتقابلة، لتصبح قياسات المتغيرين عبارة عن متوالية حسابية. ولاستخراج العلاقة الإحصائية لمعامل الارتباط الرتبي نعوض في علاقة الإرتباط الخطي البسيط بقيم هاتين المتواليتين حسب التغيرات التالية:

1- مجموع n عددا مرتبا ترتيبا تصاعديا هو:

$$\Sigma x_i = \Sigma y_i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2- مجموع مربعات هذه الأعداد هو:

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3- متوسط n عددا مرتبا ترتيبا تصاعديا هو: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{n+1}{2}$

4- أما تباين هذه القيم فهو:

$$V(x_i) = V(y_i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

5- مجموع مربعات الفروق بين رتب المتغيرين هو:

$$\cdot \sum d_i^2 = \sum [x_i - y_i]^2$$

حسب هذه المعطيات تصبح علاقة معامل الإرتباط الرتبي بالشكل التالي:

$$r = \frac{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{\Sigma d_i^2}{2n} - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2}{\frac{n^2-1}{12}}$$

$$r = 1 - \frac{\frac{\Sigma d_i^2}{2n}}{\frac{n^2-1}{12}} = 1 - \frac{12.\Sigma d_i^2}{2n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة : Spearman .

مثال: يبين الجدول التالي الدرجة التقديرية لستة طلبة في امتحاني الإحصاء والاقتصاد المطلوب حساب معامل الارتباط بين الدرجات التقديرية؟.

ج:5.7

رقم الطالب	الدرجة التقديرية في الإحصاء	الدرجة التقديرية في الاقتصاد
1	مقبول	ضعيف
2	جيد جدا	ممتاز
3	جيد	جيد
4	ضعيف	ضعيف جدا
5	ضعيف جدا	مقبول
6	ممتاز	جيد جدا

الحل:

- أولا: نرتب الدرجات التقديرية ترتيبا تصاعديا.
- ثانيا: نحسب مربع الفروق بين الدرجات التقديرية للمقياسين حسب الجدول التالي:

ج:5.8

الدرجة التقديرية في الاقتصاد	الدرجة التقديرية في الإحصاء	رتب الاقتصاد	رتب الإحصاء	d_i	d_i^2
ضعيف	مقبول	5	4	1	1
ممتاز	جيد جدا	1	2	−1	1
جيد	جيد	3	3	0	0
ضعيف جدا	ضعيف	6	5	1	1
مقبول	ضعيف جدا	4	6	−2	4
جيد جدا	ممتاز	2	1	1	1
					8

$r = 1 - \frac{6 \times 8}{6(36-1)} = 0.772$، نلاحظ أن العلاقة قوية نسبيا بين الدرجات التقديرية للمقياسين.

رابعا: دراسة صلاحية النموذج: (Etude de la qualité du modèle)

تعتمد دراسة صلاحية النموذج الخطي البسيط على اختيار المتغير المستقل الذي يعطي تفسيرا معتبرا مقارنة مع بقية المتغيرات التفسيرية، ويرتكز هذا الاختيار على النظريات الموجودة في تخصص معين أو وفق دراسات تجريبية معينة. وتعتمد الدراسة الإحصائية على معامل الارتباط والانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة، فكلما كانت قيم هذه الأخيرة صغيرة مقارنة مع قيم المعلمات المقدرة كلما كان النموذج أحسن والعكس صحيح.

أ- الشكل النهائي للنموذج الخطي البسيط: يتضمن الشكل النهائي لهذا النموذج علىالعناصر التالية:

1- تقدير معلماته.

2- تحديد معامل الارتباط الخطي البسيط.

3- تحديد الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة.

تطرقنا في الفقرات السابقة إلى العنصر الأول و الثاني، أما الفقرة التالية فسنخصصها للعنصر الثالث:

ب- تحديد الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة:

- التباين والانحراف المعياري لمعامل الانحدار b **:**

$$b=\frac{\sum\left[x_i-\bar{x}\right]\left[y_i-\bar{y}\right]}{\sum\left[x_i-\bar{x}\right]^2}=\frac{\sum\left[x_i-\bar{x}\right]Y_i}{\sum\left[x_i-\bar{x}\right]^2}=\frac{S_{x.y}}{S_{x.x}}$$

نضع: $Y_i=\left[y_i-\bar{y}\right]$ و $c_i=\frac{\left[x_i-\bar{x}\right]}{S_{x.x}}$

$$S_{x.y}=\sum\left[x_i-\bar{x}\right]\left[y_i-\bar{y}\right]=\sum\left[x_i-\bar{x}\right]Y_i$$

$$S_{x.x}=\sum\left[x_i-\bar{x}\right]^2;S_{y.y}=\sum\left[y_i-\bar{y}\right]^2$$

وبالتالي فإن: $b=\sum c_i\cdot Y_i$ علما أن: $Y_i=\alpha+\beta\ X_i+u_i$

$$b=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)\left(\alpha+\beta\cdot X_i+u_i\right)}{S_{x.x}}$$

$$b=\frac{\alpha\sum\left(x_i-\bar{x}\right)}{S_{x.x}}+\frac{\beta\cdot\sum X_i\left(x_i-\bar{x}\right)}{S_{x.x}}+\frac{\sum u_i\left(x_i-\bar{x}\right)}{S_{x.x}}$$

مع العلم أن:

$$\frac{\alpha \cdot \sum\left(x_i-\overline{x}\right)}{S_{x.x}}=0; X_i=\left(x_i-\overline{x}\right) \Rightarrow \frac{\beta \cdot \sum X_i \cdot \left(x_i-\overline{x}\right)}{S_{x.x}}=\beta$$

إذن:
$$b=\beta+\frac{\sum u_i \cdot \left(x_i-\overline{x}\right)}{S_{x.x}}=\beta+\sum c_i \cdot u_i$$

نحدد تباين الطرفين:

$$v(b)=E\left[b-\beta\right]^2=v\left(\sum c_i \cdot u_i\right)$$

$$v(b)=\sum c_i^2 \cdot v(u_i)=\frac{v(u_i)}{S_{x.x}}=\frac{v(u_i)}{\sum\left[x_i-\overline{x}\right]^2}$$

$$v(u_i)=\frac{\sum u_i^2}{n-2}=\frac{\sum\left[y_i-\overline{y}\right]^2}{n-2} \Rightarrow SD_u=\sqrt{\frac{\sum\left(y_i-\hat{y}\right)^2}{n-2}}$$

وبالتالي فإن الانحراف المعياري لـــ b هو الجذر التربيعي للتباين:

$$v(b)=\frac{v(u_i)}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2} \Rightarrow SD_b=\frac{SD_u}{\sqrt{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}$$

ملاحظة: يرتبط الخطأ المعياري لـــ b بمقام هذا المقدار $\left[\frac{v(u_i)}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\right]$، فكلما كان التغير في x_i كبيرا كلما كان هذا الخطأ صغيرا.

- **التبـاين و الانحـراف المعيـاري لـ a :** نحـدد التبـاين والانحـراف المعيـاري بنفس الطريقة السابقة:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

$$a = \frac{\sum y_i}{n} - b \cdot \bar{x} = \frac{(\alpha + \beta \cdot x_i + u_i)}{n} - b \cdot \bar{x}$$

$$a = \frac{\sum \alpha}{n} + \frac{\sum \beta \ x_i}{n} + \frac{\sum u_i}{n} - b \cdot \bar{x}$$

$$a = \alpha + \beta \ \frac{\sum x_i}{n} + \frac{\sum u_i}{n} - b \cdot \bar{x}$$

حيث أن :

$$a - \alpha = \frac{\sum u_i}{n} - \bar{x} (b - \beta) = \frac{\sum u_i}{n} - \bar{x} \sum c_i \cdot u_i$$

$$a - \alpha = \sum u_i \cdot \left(\frac{1}{n} - \bar{x} \cdot c_i \right)$$

نضع: $d_i = \frac{1}{n} - \bar{x} \cdot c_i$

وبالتالي فإن تباين الطرفين يعطى بالشكل التالي :

$$v(a) = E(a - \alpha)^2 = v(\sum u_i \cdot d_i) = \sum d_i^2 \cdot v(u_i)$$

$$v(a) = v(u_i) \cdot \sum \left[\frac{1}{n} - \bar{x} \cdot c_i \right]^2 = v(u_i) \sum \left[\frac{1}{n^2} - 2 . \frac{1}{n} \times \bar{x} \cdot c_i + \bar{x}^2 \cdot c_i^2 \right]$$

$$v(a) = v(u_i) \left[\frac{\sum 1}{n^2} - 2 . \frac{1}{n} \cdot \bar{x} \sum c_i + \bar{x}^2 \sum c_i^2 \right]$$

مع العلم أن: $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ و $\sum c_i = 0$ حسب خاصية الوسط الحسابي،

إذن تكتب علاقة تباين a بالشكل التالي:

$$v(a) = v(u_i)\left[\frac{1}{n} + \bar{x}^2 \sum c_i^2\right] = v(u_i)\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum\left[x_i - \bar{x}\right]^2}\right]$$

ويكتب الانحراف المعياري لـ a :

$$SD_a = \sqrt{\frac{v(u_i)}{n} + \bar{x}^2 \cdot v(b)}$$

تمارين تطبيقية محلولة للفصل الخامس

التمرين الرابع والعشرون: يبين الجدول التالي الوقت المحقق من طرف الحائزين على ميدالية ذهبية في سباق 100م عند الرجال والنساء في الألعاب الأولمبية من سنة 1896إلى سنة1988.

ج:5.9

السنة	الوقت المحقق من الرجال	الوقت المحقق من النساء
1896	12	–
1900	11	–
1904	11	–
1908	10.8	–
1912	10.8	–
1920	10.8	–
1924	10.6	–
1928	10.8	12.2
1932	10.3	11.9
1936	10.3	11.5
1948	10.3	11.9
1952	10.4	11.5
1956	10.5	11.5
1960	10.2	11
1964	10	11.4
1968	9.95	11
1972	10.14	11.07
1976	10.06	11.08
1980	10.25	11.06
1984	9.99	10.97
1988	9.92	10.54

Source: the Canadian World Almanac and Book of Facts; 1990,Toronto, Global Press, Canada.

المطلوب ما يلي:

1- حدد اتجاه هذه الظاهرة عند الرجال و النساء بواسطة معادلة خط الانحدار؟.

2- ماذا تفكرون في المقولة التي تقول سيتحصل النساء في يوم ما على نتائج أحسن من الرجال في سباق 100متر.

التمرين الخامس والعشرون:

أجب بنعم أو لا

1- يكون معامل الارتباط بين متغيرين $\cong 0$ إذا كانت توجد بينهما استقلالية؟.

2- عندما يكون معامل الارتباط الخطي سالبا معناه يوجد ارتباط ضعيف؟.

3- إذا كان متغيران مرتبطين خطيا معنى ذلك أن تغير أحدهما هو نتيجة تغير الأخر؟.

4- إذا كان لدينا n زوج من النقاط (x_i, y_i) وأضفنا لها m نقطة كل منها يساوي $(\overline{x}, \overline{y})$، فإن معامل الارتباط لـ n زوج من النقاط هو نفسه لـ: $m+n$؟.

التمرين السادس والعشرون:

يبين الجدول التالي تطور الدخل والاستهلاك الشهري لأسرة معينة:

ج:5.10

الزمن	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
الرقم القياسي لأسعار الاستهلاك(%)	100	90	105	100	120	130
الدخل الشهري	80	90	80	95	100	105

إذا كانت الكمية المستهلكة في فترة الأساس t_0 هي 15 كلغ وثمن الكلغ يساوي 10د.ج.

المطلوب ما يلي:

1- ادرس العلاقة بين الاستهلاك و الدخل إن وجدت؟.

2- ما هي نسبة تفسير الدخل الشهري للاستهلاك؟.

3- قدر قيمة استهلاك الفترة t_7 إذا توقعنا أن الدخل الشهري سيصبح 110د.ج؟.

التمرين السابع والعشرون:

يبين التوزيع التكراري التالي علامات 10 طلبة في امتحانين في مقياس الإحصاء الوصفي:

ج:5.11

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i (الامتحان الأول)	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
y_i (الامتحان الثاني)	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6

المطلوب ما يلي:

1- ضع شكل الانتشار؟.

2- أوجد معادلة خط الانحدار: $f(x_i), f(y_i)$ ؟

3- أرسم خطي الانحدار؟ ماذا تلاحظ؟.

4- قس قوة الارتباط؟.

5- حدد الشكل النهائي للنموذج؟.

التمرين الثامن والعشرون:

تظهر البيانات التالية العلاقة الموجودة بين السن x_i وضغط الدم y_i لأثني عشرة امرأة:

ج:5.12

ضغط الدم y_i	السن x_i
147	56
125	42
160	72
118	36
142	63
128	47
150	55
145	49
125	38
140	42
152	68
155	60

المطلوب ما يلي:

1- أوجد معادلة خط الانحدار $f(x_i)$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى؟.

2- قس قوة الارتباط بين المتغيرين؟.

3- قدر ضغط الدم لامرأة عمرها 45 سنة؟.

التمرين التاسع والعشرون:

تبين الإحصائيات التالية العلاقة بين الناتج الوطني المحلي x_i والاستهلاك الخاص y_i في بلد ما من سنة 1985 إلى سنة 1994:

ج:5.13

السنة	x_i	y_i
85	14	1
86	16	2
87	19	4
88	21	5
89	24	7
90	26	8
91	29	9
92	31	11
93	33	13
94	38	15

المطلوب ما يلي:

1-حدد نوع العلاقة بين الاستهلاك الخاص والناتج الوطني المحلي إن وجدت؟.

2- قدر معادلة خط الانحدار بطريقة المربعات الصغرى؟.

3- قس قوة العلاقة بين المتغيرين؟.

4- قدر قيمة الاستهلاك الخاص لسنة 1996؟.

5- احسب الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة؟ ماذا تلاحظ؟.

حل تمارين الفصل الخامس

التمرين الرابع والعشرون:

إن المتغير المفسر في هذا التمرين هو عنصر الزمن، وهو موضوع الفصل السادس، إذن نؤجل الحل بعد التطرق إلى هذا الفصل.

التمرين الخامس والعشرون:

1- نعم ، 2- لا ، 3- لا ، 4- نعم .

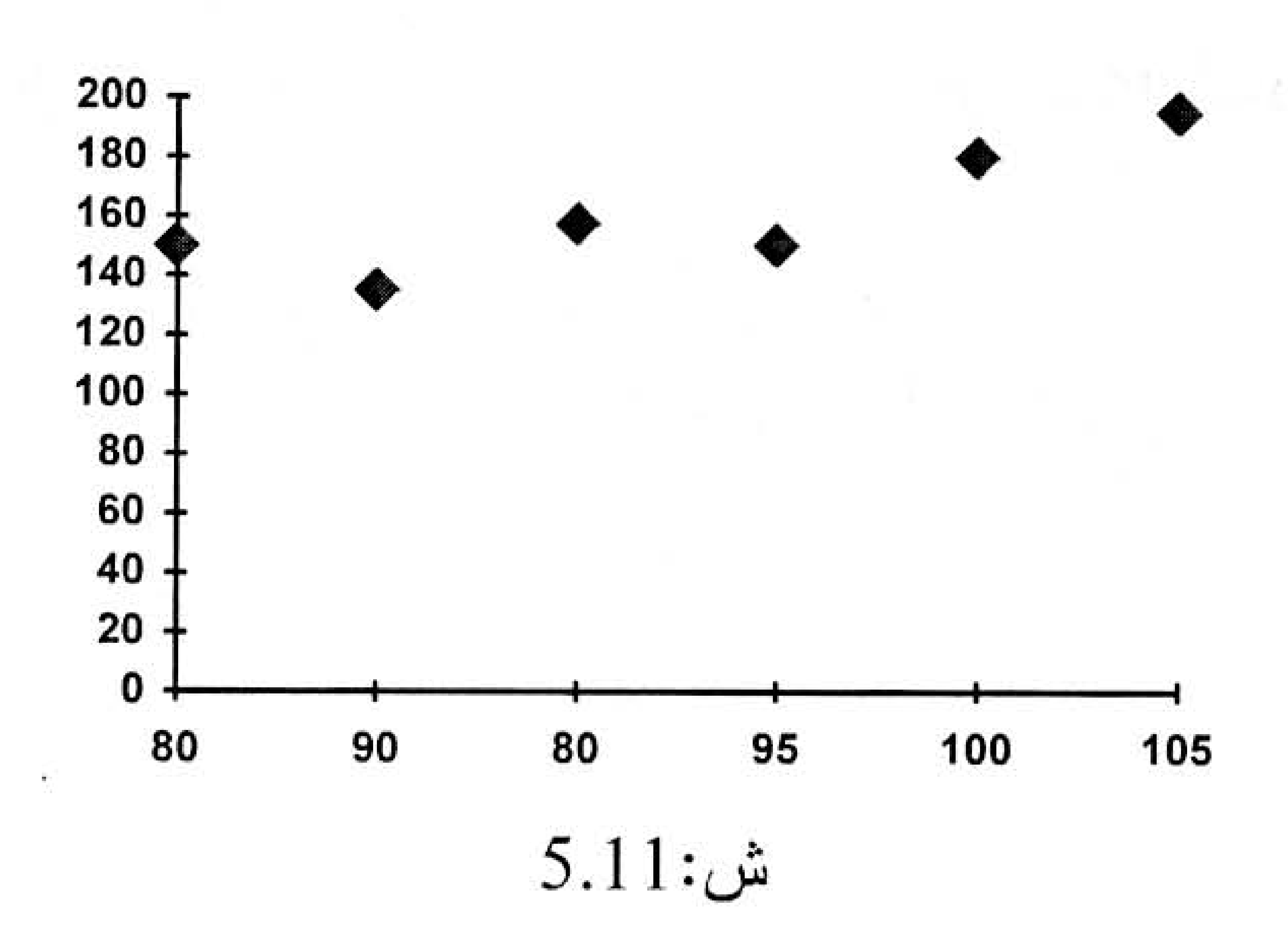
التمرين السادس والعشرون:

تتطلب الإجابة عن السؤال الأول تحديد الاستهلاك الشهري لكل الفترات:

ج:5.14

t_i	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
C_t	150	135	157.5	150	180	195

1-لدراسة العلاقة بين المتغيرين، نحدد أولا شكل العلاقة بينهما بيانيا:



ش:5.11

من العرض البياني، يمكن اعتبار أن العلاقة طردية خطية بين المتغيرين، لأن اتجاه كوكبة النقاط هو اتجاه خطي ويكتب شكلها كالتالي:

$$c_t = \alpha + \beta \times R_t + u_t$$

- تحديد معلمات النموذج:

$$\overline{c} = 161.25; \overline{R} = 91.666;$$

$$\sum c_t \times R_t = 89475; \sum c_t^2 = 158456.25; \sum R_t^2 = 50950$$

أولا: معامل الانحدار $b = \dfrac{\dfrac{89475}{6} - 161.25 \times 91.666}{\dfrac{50950}{6} - 8401.55} = 1.476$

ثانيا: الثابت a: $a = 161.25 - 1.476 \times 91.66 = 25.97$

ثالثا: معادلة خط الانحدار $c_t = 25.97 + 1.476 \times R_t$

2- تحديد نسبة تفسير الدخل الشهري للاستهلاك: إيجاد معامل الارتباط

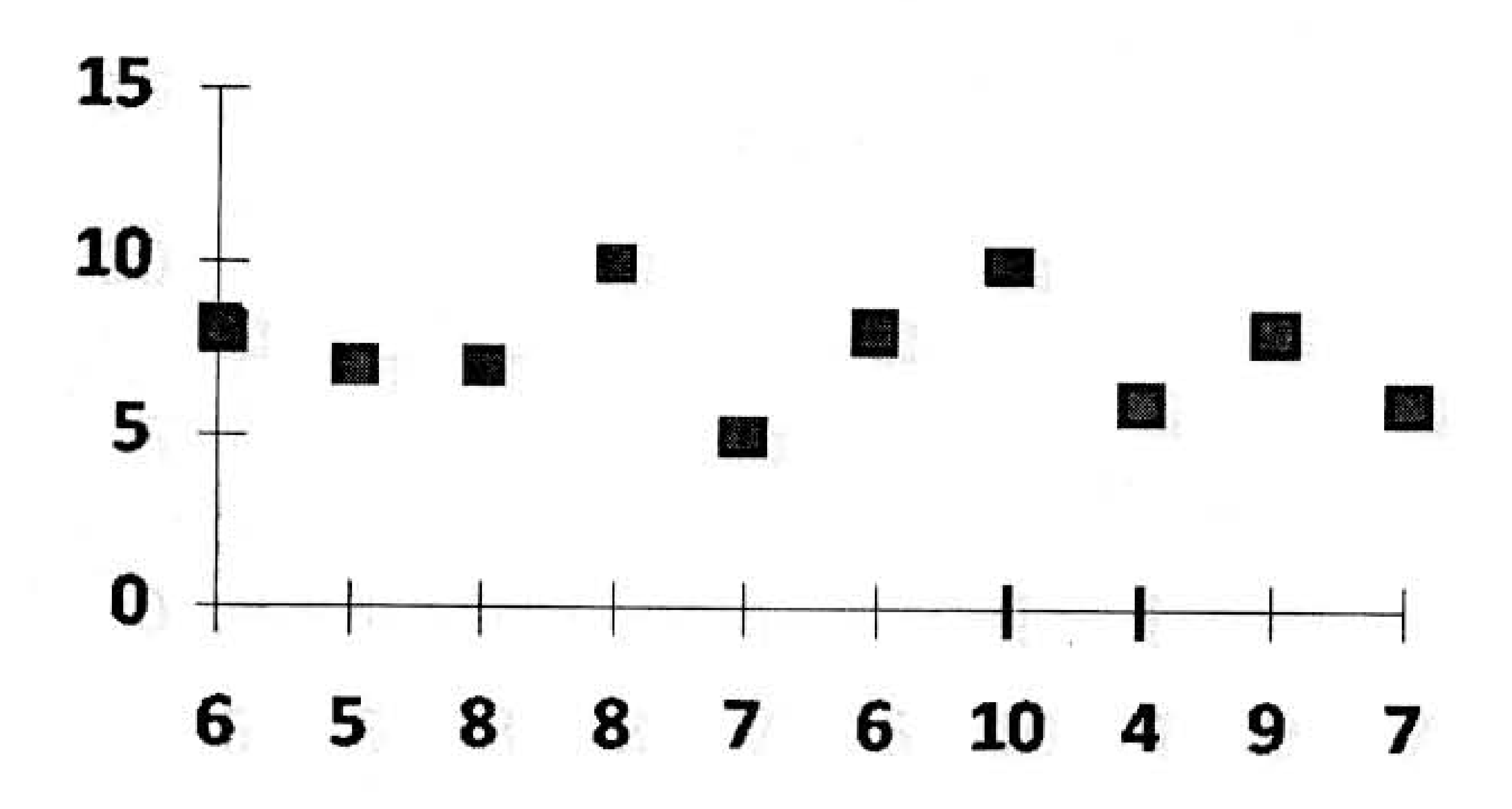
$r = \dfrac{\dfrac{89475}{6} - 161.25 \times 91.66}{9.434 \times 20.2} = 0.689 \cong 69\%$، نسبة التفسير هي 69%.

3- تحديد أو تقدير قيمة الاستهلاك للفترة t_7:

$$c_7 = 25.97 + 1.476 \times 110 = 188.3$$

التمرين السابع والعشرون:

1- تحديد شكل كوكبة النقاط:



ش:5.12

نلاحظ من العرض البياني أن العلاقة بين علامات الامتحانين ضعيفة نسبيا لأن شكل كوكبة النقاط موازيا تقريبا لمحور السينات.

2-تحديد معادلتي خطي الانحدار $f(y);f(x)$:

أولا: معادلة خط الانحدار $f(x)$:

$$\overline{y}=7.5;\overline{x}=7;\sum x_i\cdot y_i=540;\sum x_i^2=520;\sum y_i^2=587$$

$$b_1=\frac{\frac{540}{10}-7\times7.5}{\frac{520}{10}-49}=0.5;a_1=7.5-0.5\times7=4$$

$$f(x_i)=\hat{y}_i=4+0.5.x_i$$

ثانيا:معادلة خط الانحدار $f(y_i)$:

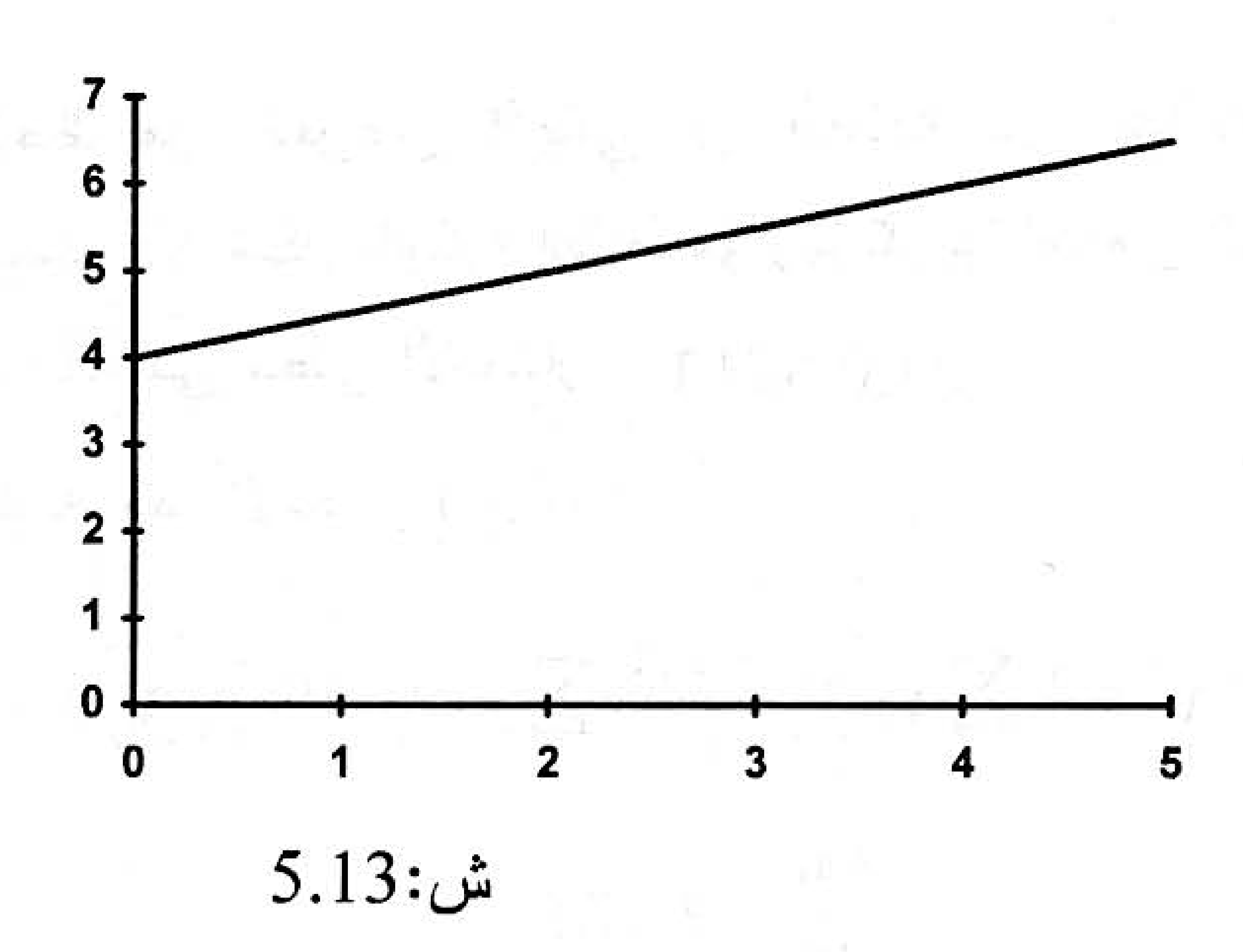
$$b_2 = \frac{54 - 52.5}{\frac{587}{10} - 56.25} = 0.612$$

$$a_2 = 7 - 0.612 \times 7.5 = 2.41$$

$$f(y_i) = \hat{x}_i = 2.41 + 0.612.y_i$$

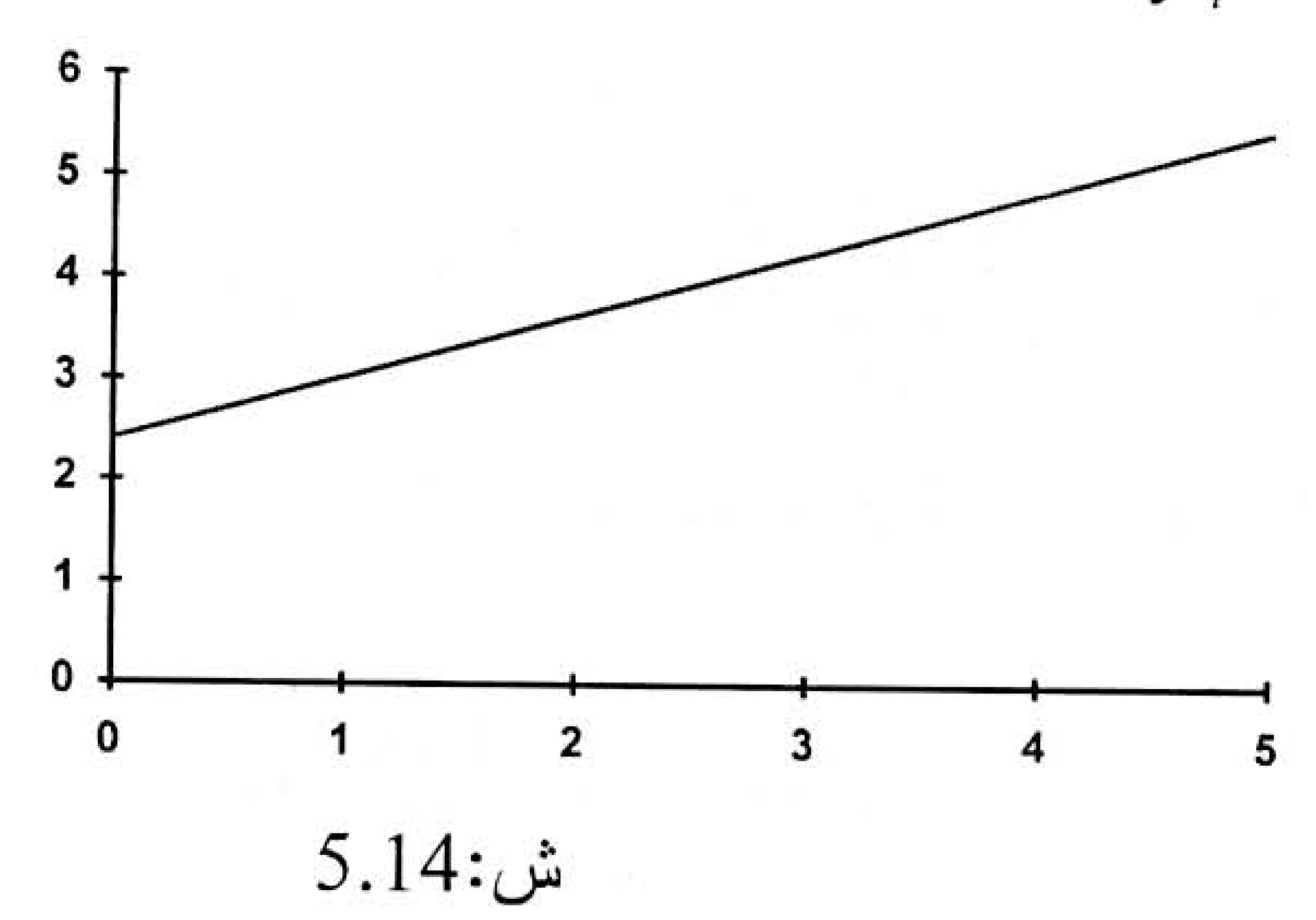
3- رسم خطي الإنحدار:

- خط الإنحدار $f(x_i)$:



ش:5.13

- خط الانحدار $f(y_i)$:



ش:5.14

4- تحديد معامل الارتباط: $r = \sqrt{b_1 \times b_2} = \sqrt{0.5 \times 0.612} = 0.55$.

5- تحديد الشكل النهائي للنموذج $f(x_i)$:

أ- تحديد ألقيم المقدرة لعلامات الامتحان الثاني $\hat{y}_i$ ، وحساب الفرق بين القيم الحقيقية والقيم المقدرة:

ج:5.15

$\hat{y}_i$	u_i	u_i^2	$(x_i - \bar{x})^2$
7	−1	1	1
6.5	−0.5	0.25	4
8	1	1	1
8	−2	4	1
7.5	2.5	6.25	0
7	−1	1	1
9	−1	1	9
6	0	0	9
8.5	0.5	0.25	4
7.5	1.5	2.25	0
$\sum$		17	30

ب- تحديد القيمة المقدرة للانحراف المعياري للمتغير العشوائي u_i:

$$. SD_U = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{17}{10-2}} = 1.46$$

ج- تحديد القيمة المقدرة للانحراف المعياري لمعامل الانحدار:

$$. \ SD_b = \frac{SD_u}{\sqrt{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}} = \frac{1.46}{\sqrt{30}} = 0.266$$

د- تحديد القيمة المقدرة للانحراف المعياري للمعامل a

$$SD_a = \sqrt{\frac{v(u)}{n} + \overline{x}^2 \cdot v(b)} = \sqrt{0.2125 + 49 \times 0.07083} = 1.9192$$

إذن الشكل النهائي للنموذج هو:

$$\hat{y}_i = 4 + 0.5. x_i .... r = 0.55$$

$$SD_a = (1.92), SD_b = (0.266)$$

ملاحظة: إن معامل الارتباط بين درجات الامتحان الثاني والامتحان الأول ضعيف نسبيا، وهذا راجع لوجود عوامل أخرى تؤثر في علامات الامتحان الثاني.

كما أن الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة كبيرة نسبيا مقارنة مع قيم هذه المعاملات إذن يعتبر تفسير x_i لـ y_i تفسيرا ضعيفا نسبيا.

التمرين الثامن والعشرون:

1- إيجاد معادلة خط الانحدار $f(x_i)$:

$$b = \frac{129.53}{129.57} = 0.99; a = 140.58 - 0.99 \times 52.33 = 88.302$$

$$\hat{y}_i = 88.302 + 0.99\, x_i$$

2- تحديد معامل الانحدار:

$$\cdot\ r = \frac{\frac{89833}{12} - 52.33 \times 140.58}{\sqrt{21942.42}} = 0.874$$

3- تقدير ضغط الدم لامرأة عمرها 45 سنة:

$$\hat{y}_i = 88.302 + 0.99 \times 45 = 133.25$$

4- تحديد الشكل النهائي للنموذج: نستعمل نفس طريقة التمرين السابق.

$$SD_U = 6.93$$

$$\hat{y}_i = 88.302 + 0.99 x_i \ldots r = 0.874$$

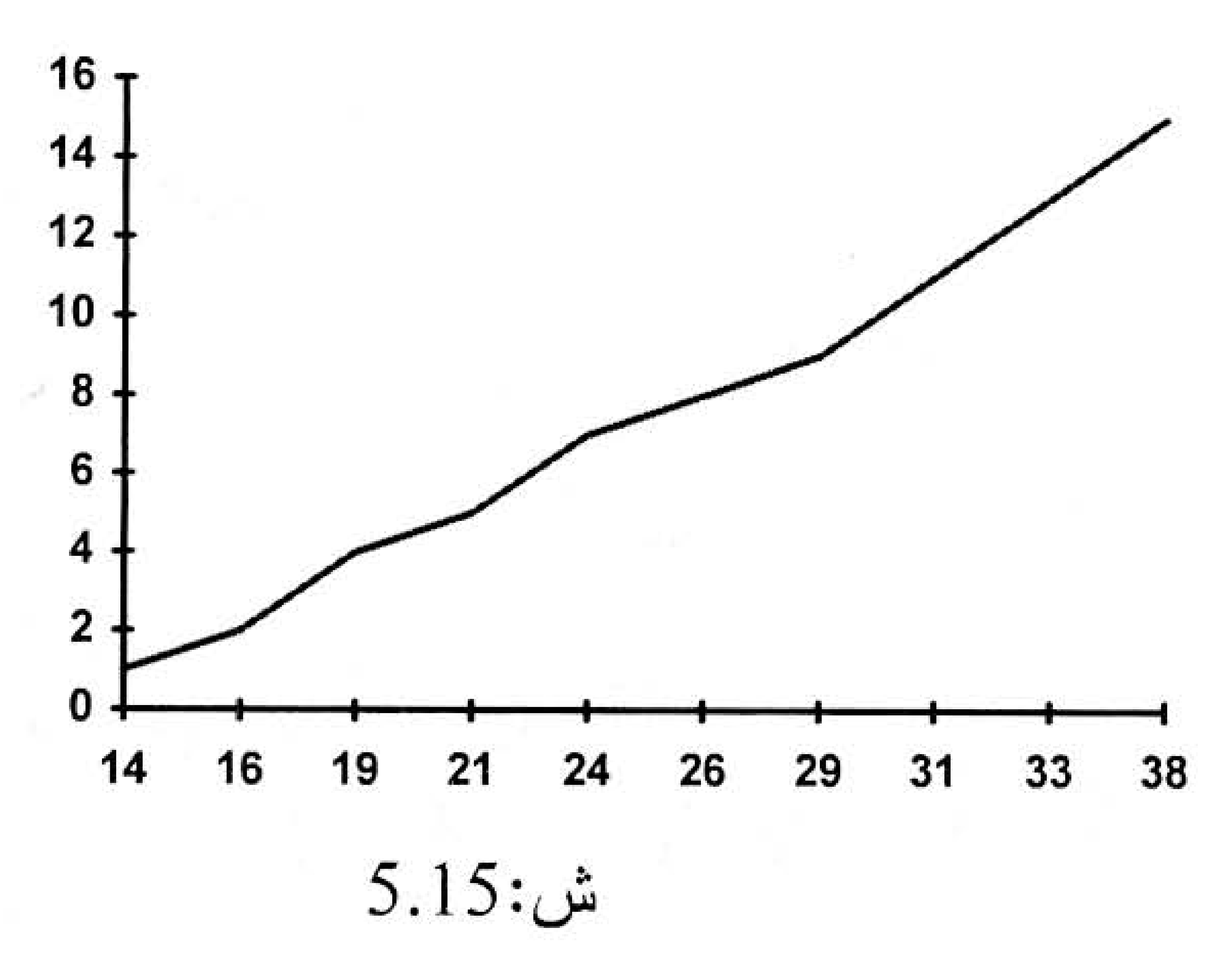
$$SD_a = 9.42, SD_b = 0.176$$

ملاحظة: يفسر المتغير المستقل المتغير التابع بشكـــل مقبول للأسبـــاب التالية:

- الارتباط قوي نسبيا.
- الانحرافات المعيارية للمعلمات الم u_i قدرة صغيرة مقارنة مع قيم المعلمات نفسها.

التمرين التاسع والعشرون:

1- نلاحظ مباشرة من الجدول وجود علاقة طردية بين الاستهلاك الخاص y_i والناتج الوطني x_i، والعرض البياني التالي يبين ذلك:



ش:5.15

يتضح من العرض البياني أن العلاقة بين المتغيرين خطية وطردية.

2- تقدير معلمات النموذج الخطي البسيط:

$$\overline{x} = 25.1, \overline{y} = 7.5, \sum x_i \cdot y_i = 22.04, \sum x_i^2 = 6841$$

- تقدير معامل الانحدار: $b = \dfrac{220.4 - 25.1 \times 7.5}{684.1 - (25.1)^2} = \dfrac{32.15}{54.09} = 0.594$

- القيمة المقدرة للثابت a: $a = 7.5 - 0.594 \times 25.1 = -7.42$

3- تقدير قيمة الاستهلاك الخاص لسنة1996: لا يمكن تقدير قيمة الاستهلاك لهذه السنة لأن قيمة الناتج الوطني غير معروفة.

4- قياس قوة العلاقة بين المتغيرين:

$$v(x_i) = 54.09 \Rightarrow SD_x = 7.35$$

$$v(y_i) = 75.4 - 7.5^2 = 19.15 \Rightarrow SD_y = 4.37$$

$r = \dfrac{32.15}{7.35 \times 4.37} = 0.998$، يقترب معامل الارتباط إلى الواحد، معناه وجود علاقة قوية بين المتغيرين.

5- تحديد الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة:

$$v(u_i) = \frac{\Sigma u_i^2}{n-2} = \frac{1.39}{8} = 0.17$$

$$v(b) = \frac{v(u_i)}{n \cdot v(x_i)} = \frac{0.17}{10 \times 54.09} \Rightarrow SD_b = 0.0179$$

$$v(a) = \overline{x}^2 \cdot v(b) + \frac{v(u)}{n} = 630 \times 0.00032 + \frac{0.17}{10} = 0.22$$

$SD_a = 0.469$

نلاحظ أن قيمة كل من الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة صغيرة مقارنة مع قيمها وبالتالي نستنتج وجود علاقة جيدة بين المتغيرين.

الفصل السادس

السلاسل الزمنية

Series chronologiques (Times-Series)

السلسلة الزمنية هي سلسلة معطيات إحصائية مرتبطة بالزمن، أوهي عبارة عن سلسلة قيم ظاهرة معينة تتغير في الزمن.

لماذا تدرس السلاسل الزمنية؟.

تعتبر دراسة تطور الظواهر واتجاهاتها والتحكم في مساراتها من بين أسباب نجاح المؤسسات الاقتصادية التي تعتمد على الطرق العلمية في تسييرها، حيث تحتاج كل مؤسسة مهما كانت طبيعة نشاطها إلى معرفة وتحليل الظواهر المحيطة بها والعوامل التي تؤثر فيها والتنبؤ بقيمها في المستقبل، ولتحديد وبلوغ ذلك، يجب دراسة وتحليل معطيات الفترات السابقة لهذه الظواهر قصد تحديد مسارها واتجاهها العام، بشرط أن تكون كل قيمة من هذه المعطيات مرتبطة بفترة زمنية أو بتاريخ معين (سنة، شهر، أسبوع،...، أول جانفي،31 ديسمبر...).

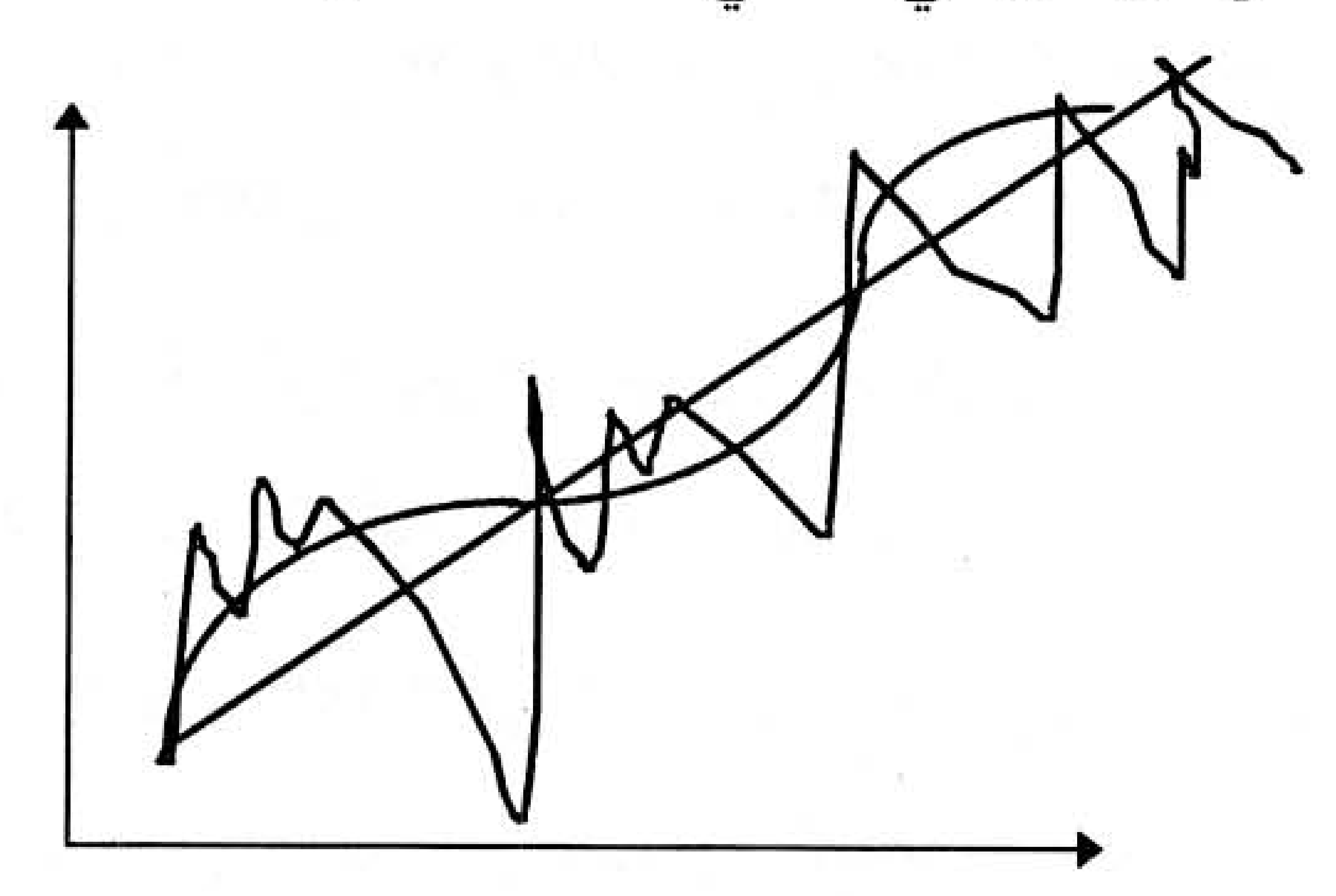
1- مكونات السلسلة الزمنية:(Les composantes d'une série chronologique) تتكون السلسلة الزمنية بصفة عامة من أربعة مركبات:

أ- مركبة الإتجاه العام: (la tendance générale:TREND)
تبين الاتجاه العام للظاهرة المدروسة في المدى الطويل، ويكون الاتجاه العام بصفة عامة على شكل خط مستقيم.

ب- **المركبة الدورية:(la composante cyclique)** وهي عبارة عن مركبة الدورة الاقتصادية (مثلا)، تبين أثر النشاط الاقتصادي في المدى المتوسط. تتناسب مراحلها مع مراحل الدورة الاقتصادية (الانتعاش،الرواج، الركود، الكساد)، وهي تتكرر باستمرار عبر الزمن(المدة المتوسطة لهذه الدورة هي 5 سنوات).

ج- **المركبة الموسمية:(la composante saisonnière)** تبين تغير الظاهرة المدروسة في المدى القصير، وهي ناتجة عن التغير في الفصول أو المواسم مثلا: الإنتاج الزراعي، إنتاج الكهرباء واستهلاكها...إلخ.

د- **المركبة العشوائية: (composante aléatoire)** تتمثل في التغيرات التي لا يمكن ضبطها أو التي لا توجد لها علاقة بعنصر الزمن، وهي ناتجة عن عوامل غير منتظرة مثلا: انخفاض إنتاج مادة معينة عند تعرض الآلة لعطب أو خلال الإضرابات...الخ، في هذه الحالة، تكون المركبة العشوائية ناتجة عن عوامل غير هامة و مستقلة.
يبين العرض البياني التالي مختلف مكونات السلسلة الزمنية:



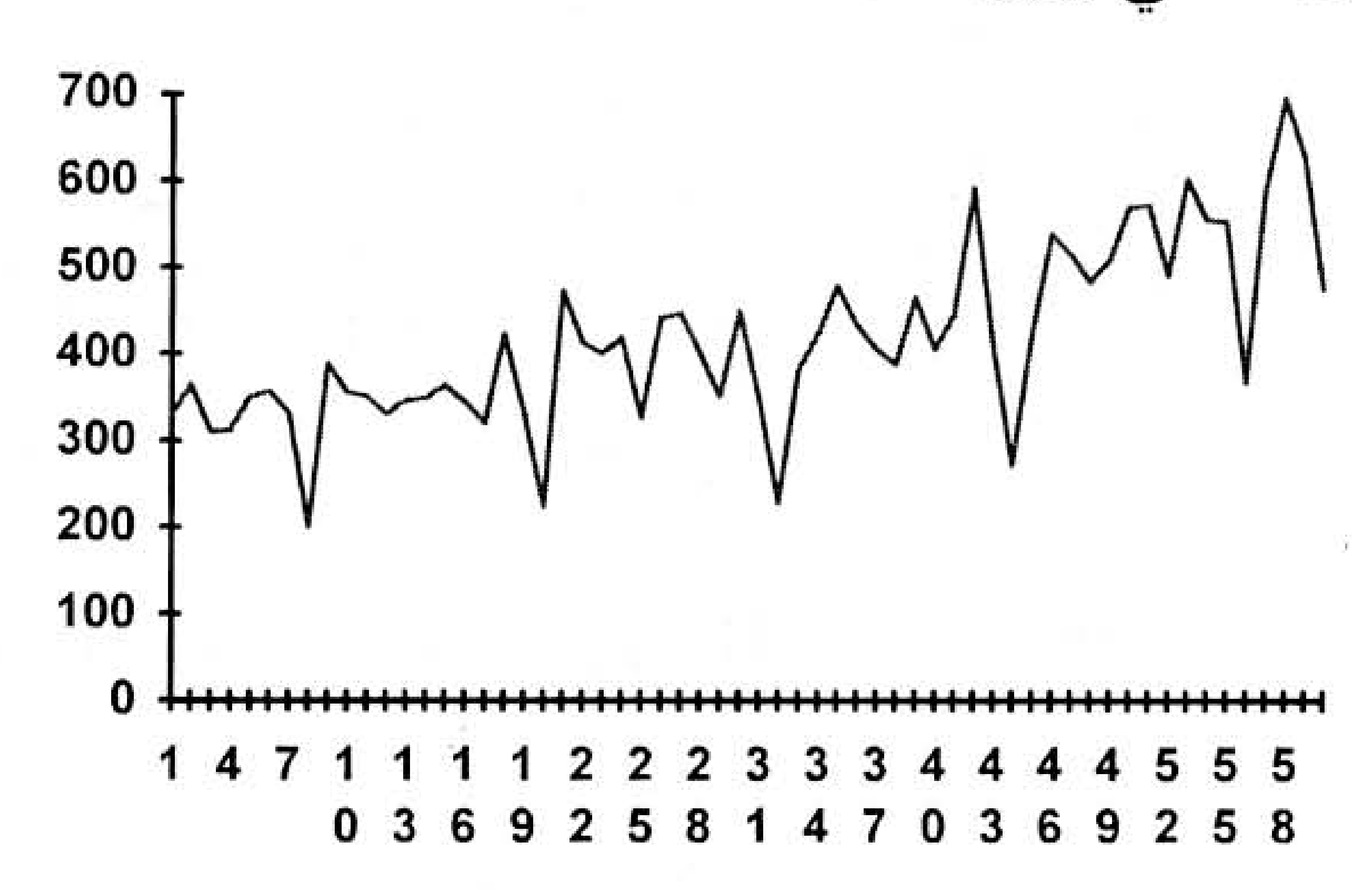
ش:6.1

2- أشكال نماذج السلاسل الزمنية و طرق تحديدها:

تستعمل السلاسل الزمنية في التنبؤ بقيم الظاهرة المدروسة لفترات لاحقة عن طريق تحديد الاتجاه العام، ولكن قبل القيام بذلك، نتطرق إلى مختلف أشكال نماذج السلاسل الزمنية التي تعتمد على عنصر الزمن كمتغير مستقل. يمكن أن نميز بين شكلين من أشكال هذه النماذج بناءا على أنواع العلاقات بين المتغير التابع والمتغير المستقل، ويمكن أن نختصرها في علاقتين الخطية وغير الخطية، فالعلاقة الخطية تتعلق بالشكل التجميعي والعلاقة غير الخطية ترتبط بالشكل المضاعف.

أولا: أشكال نماذج السلاسل الزمنية:

أ- **الشكل التجميعي:(Schéma additif)** يكون العرض البياني للسلسلة الزمنية متشابها عبر مختلف الفترات الزمنية. إن قيم الظاهرة المدروسة، في هذه الحالة، هي عبارة عن مجموع قيم مركبات السلسلة الزمنية، والشكل التالي يبين ذلك:



ش:6.2

$y_t = x_t + s_t + u_t$ حيث أن:

y_t قيمة الظاهرة المدروسة في الفترة t .

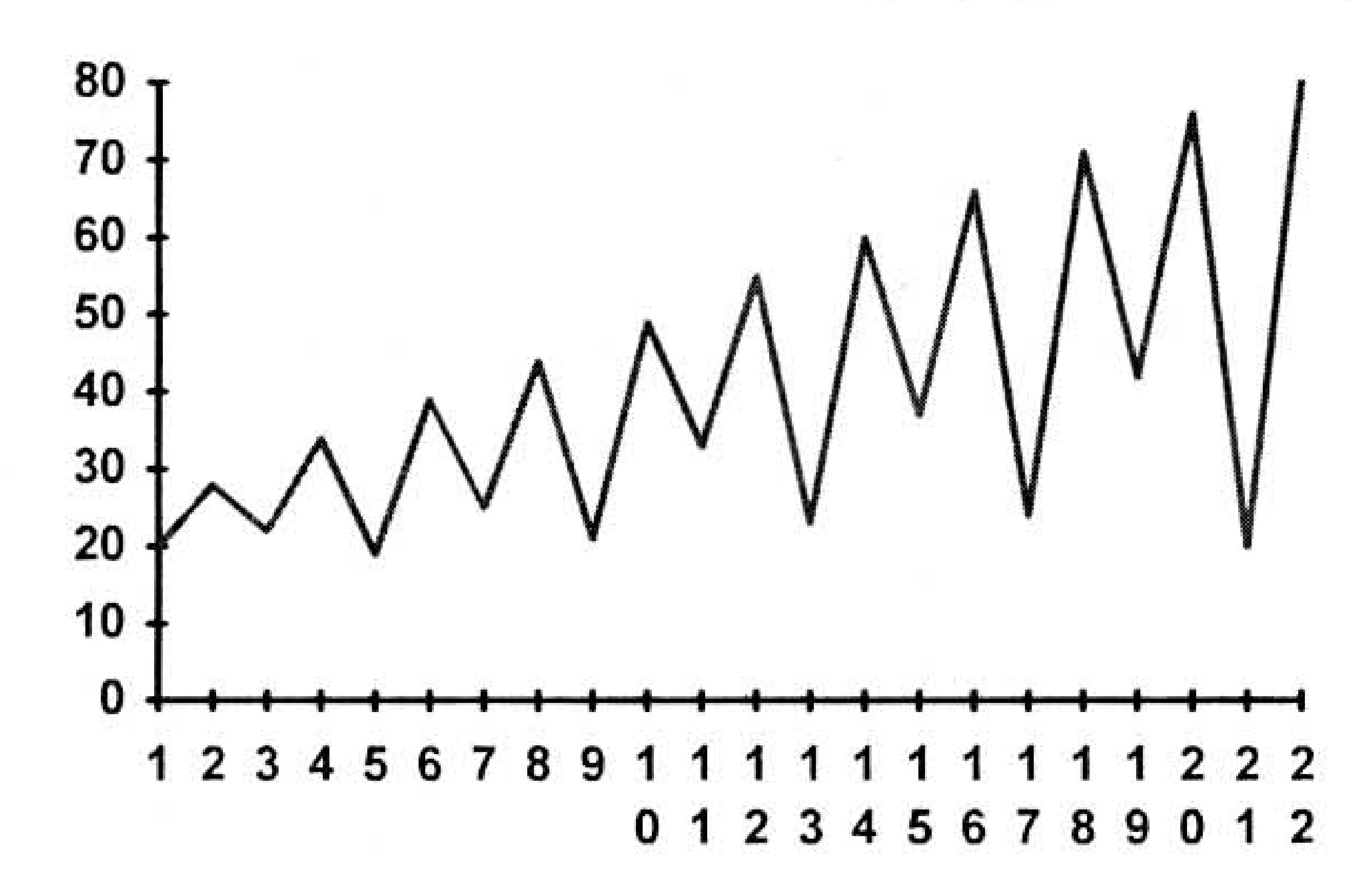
x_t قيمة مركبة الاتجاه العام في الفترة t .

s_t قيمة المركبة الموسمية في الفترة t .

u_t قيمة المركبة العشوائية في الفترة t .

نلاحظ أن التغيرات الموسمية متساوية تقريبا من فترة إلى فترة أخرى تالية.

ب- الشكل المضاعف: (Schéma multiplicatif) يكون شكل السلسلة الزمنية متزايدا على شكل تزايد متوالية هندسية، وفي هذه الحالة، قيمة الظاهرة المدروسة هي عبارة عن جداء مركبات السلسلة الزمنية، والشكل التالي يبين ذلك:



ش:6.3

النموذج المناسب هو كما يلي: $y_t = x_t \times s_t (1 + u_t)$

ثانيا: أهم طرق تحديد شكل السلسلة الزمنية:

نكتفي باستعمال طريقتين لتحديد شكل السلسلة الزمنية:

أ - **الطريقة البيانية:** يمكن أن نحدد شكل السلسلة الزمنية من خلال العرض البياني، فإذا كانت تذبذبات هذه السلسلة ثابتة نقول أننا في

حالة نموذج تجميعي، أما إذا كانت هذه التغيرات غير ثابتة أي متزايدة فنقول أننا في حالة نموذج مضاعف(أنظر في ذلك العرضين البيانيين السابقين).

ب- الطريقة التحليلية لتحديد شكل نموذج السلسلة الزمنية:

توجد عدة طرق عملية لتحديد شكل هذا النموذج نذكر من بينها ما يلي:

1- طريقة الوسط السنوي: (La méthode de la moyenne annuelle) تستعمل هذه الطريقة إذا كانت السنة مقسمة إلى عدة فترات (سداسيات، أشهر، ثلاثيات،...)، ولهذه الطريقة خطوتان:

- الخطوة الأولى: حساب الوسط الحسابي السنوي لكل سنة.
- الخطوة الثانية: حساب الفرق بين قيم أجزاء السنة(الثلاثي،السداسي...) والوسط السنوي، فإذا كانت هذه الفروق تشكل متوالية حسابية نستنتج أن النموذج تجميعي، أما إذا كانت هذه الفروق على شكل متوالية هندسية فنقول أننا في حالة نموذج مضاعف.

2- **طريقة الإنحراف المعياري: (La méthode de l'écart-type)**

تحتوي هذه الطريقة على خطوتين:

أولا: تحديد الانحراف المعياري لكل سنة.

ثانيا: نكون في حالة نموذج تجميعي إذا كانت الانحرافات المعيارية المتحصل عليها متساوية و ثابتة أو متقاربة. أما إذا كانت هذه الانحرافات متباينة و متباعدة فإننا نكون في حالة نموذج مضاعف.

مثال: تبين السلسلة الزمنية التالية مبيعات سلعة معينة من سنة 1987 إلى سنة 1991 حسب عدد الوحدات المباعة في الثلاثي، المطلوب

تحديد شكل النموذج باستعمال طريقة الوسط السنوي وطريقة الانحراف المعياري؟.

ج:6.1

الثلاثيات	1	2	3	4
1987	20	28	22	34
1988	19	39	25	44
1989	21	49	33	55
1990	23	60	37	66
1991	24	71	42	76

1- نحدد شكل النموذج باستعمال طريقة الوسط السنوي: يبين الجدول التالي مختلف العمليات الحسابية الخاصة بهذه الطريقة:

ج:6.2

	التغيرات الموسمية			
$\overline{y}$	1	2	3	4
26	−6	2	−4	8
31.75	−12.75	7.25	−6.75	12.25
39.5	−18.5	9.5	−6.5	15.5
46.51	−23.5	13.5	−9.5	19.5
53.25	−29.25	17.75	−11.25	22.75

نلاحظ أن التغيرات الموسمية للثلاثي الأول تتضاعف من سنة إلى أخرى، وهي مضاعفات العدد 6 تقريبا، إذن النموذج الذي تتبعه السلسلة الزمنية في المدى الطويل هو نموذج مضاعف ويكتب بالشكل التالي:

$$y_t = x_t \times s_t + u_t$$

2- تحديد شكل النموذج باستعمال طريقة الانحراف المعياري:

أولا: نحدد الوسط الحسابي السنوي (العمود الثاني للجدول التالي) .

ثانيا: نحسب الانحراف المعياري السنوي(العمود الثالث للجدول التالي).

ج:6.3

السنوات	$\overline{x}$	SD_i
1987	26	5.477
1988	37.75	11.77
1989	39.5	13.37
1990	46.51	17.36
1991	53.25	21.29

نلاحظ أن الانحرافات المعيارية غير ثابتة من سنة إلى أخرى، إذن النموذج الموافق لهذه السلسلة هو النموذج المضاعف.

ملاحظة: تتناسب أغلب الحالات التطبيقية مع أشكال النماذج المضاعفة.

3- طرق تحديد مركبة الإتجاه العام

أ- طريقة المتوسطات المتحركة: (La méthode des moyennes mobiles) تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق المستعملة في تحديد مركبة الاتجاه العام. وتمكن طريقة المتوسطات المتحركة من رؤية واضحة لاتجاه الظاهرة المدروسة في المدى الطويل، حيث تبين مدى سرعتها أو تباطئها.

يتم الحصول على سلسلة المتوسطات المتحركة باستبدال مجموعة من قيم السلسلة الأصلية بقيمة واحدة(الوسط الحسابي أو الوسيط)، وتسمى مجموعة هذه القيم بفترة الوسط المتحرك، تختلف هذه الفترة من سلسلة زمنية إلى سلسلة أخرى، وتحدد حسب طبيعة السلسلة الزمنية الأصلية أي حسب التغيرات الموسمية، مثلا: إذا كان الأمر يتعلق بدورة تجارية، فإن فترة الوسط المتحرك تساوي عدد القيم التي تتكون منها هذه الدورة.

يساوي عدد قيم سلسلة المتوسطات المتحركة إلى عدد قيم السلسلة الأصلية مطروحا منه عدد قيم الوسط المتحرك مضافا إليه واحد. يقارب العرض البياني لسلسلة المتوسطات المتحركة خط مستقيم في أغلب الأحيان، وفي بعض الحالات يمكن أن يقارب إلى أحد الأشكال التالية:

$$y_t = a \cdot e^{b.t}$$

$$y_t = \frac{1}{a + b^t}$$

$$y_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2$$

تعتمد طريقة المتوسطات المتحركة أساسا على خبرة و تجربة الباحث في تحديد فترة الوسط المتحرك، كما يجب توفر بعض الشروط من بينها:

- انتظام تغيرات السلسلة الزمنية.
- تساوي فترة الوسط المتحرك مع دورية المركبات.
- خطية الاتجاه العام للظاهرة المدروسة.

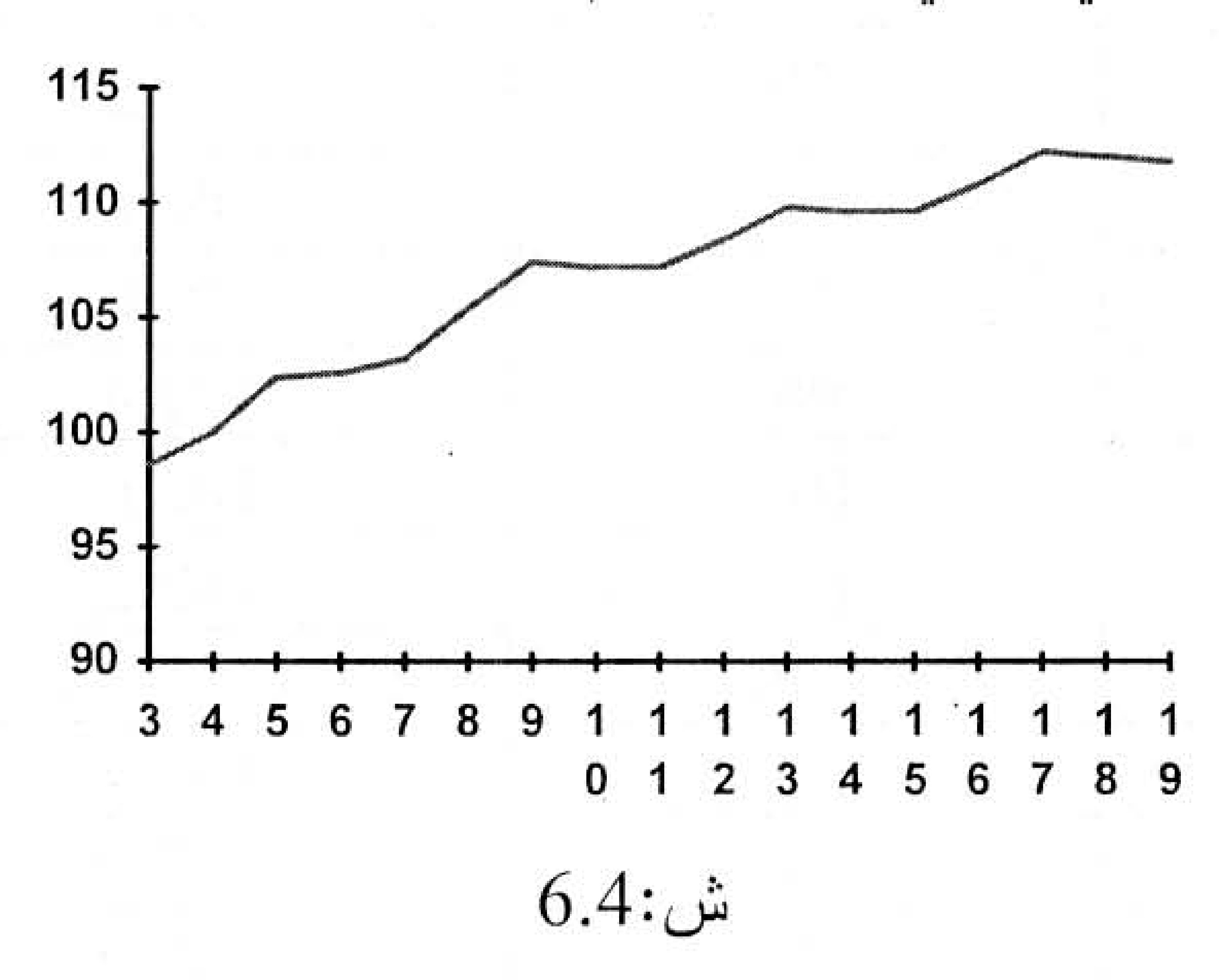
مثال: تبين السلسلة الزمنية التالية مبيعات مادة معينة خلال 21 سنة، المطلوب تحديد الاتجاه العام للمبيعات باستعمال طريقة المتوسطات المتحركة؟.

ج:6.4

t	y_t	$\bar{y}_t$
1	95	___
2	98	___
3	105	98.6
4	99	100
5	96	102.4
6	102	102.6
7	110	103.2
8	106	105.4
9	102	107.4
10	107	107.2
11	112	107.2
12	109	108.4
13	106	109.8
14	108	109.6
15	114	109.6
16	111	110.8
17	109	112.2
18	112	112
19	115	111.8
20	113	___
21	110	___

نلاحظ من هذا الجدول أن فترة الوسط المتحرك تساوي 5 سنوات لأن مدة دورة المبيعات تتغير كل 5 سنوات، مثلا: لاحظ مبيعات 5 سنوات الأولى و5 سنوات الثانية بالنسبة للأولى نسجل ارتفاع في المبيعات حتى السنة الخامسة أين يحدث الانخفاض، من هنا تبدأ الفترة الثانية وهكذا...

يبين العرض البياني التالي الاتجاه العام للمبيعات:



ش:6.4

ب- طريقة المربعات الصغرى: (La méthode des moindres carrés) لا يمكن استعمال طريقة المتوسطات المتحركة في عملية التنبؤ بشكل دقيق، غير أنها تبين شكل الاتجاه العام للظاهرة المدروسة في المدى البعيد. ولهذا السبب سنتطرق إلى إحدى الطرق التحليلية(طريقة المربعات الصغرى العادية)التي كانت المحور الرئيسي للفصل الخامس، غير أن المتغير المستقل في هذه الحالة هو عنصر الزمن حيث أن قيمه هي عبارة عن متوالية حسابية. و يجب أن نميز بين نوعين من السلاسل الزمنية.

4- أنواع السلاسل الزمنية:

أ- **النوع الأول:** السلسلة الزمنية التي لا تحتوي على المركبة الموسمية، نستعمل في هذه الحالة طريقة المربعات الصغرى كما رأيناها في الفصل الخامس، حيث قيم المتغير المستقل هي عبارة عن متوالية حسابية أساسها واحد، ويكتب بالشكل التالي:

$\bar{t} = \frac{n+1}{2} ; \sum t^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$، وتصبح معلمات النموذج الخطي البسيط بالشكل التالي:

$$b = \frac{\frac{\sum t_i \cdot y_i}{n} - \frac{(n+1)}{2} \times \bar{y}}{\frac{(n^2-1)}{12}}$$

$$a = \bar{y} - b\,\frac{(n+1)}{2}$$

مثال: تبين السلسلة الزمنية التالية تطور الاستثمار في مؤسسة ما خلال تسعة سنوات:

ج:6.5

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	710	688	672	645	631	610	601	572	540

المطلوب ما يلي:

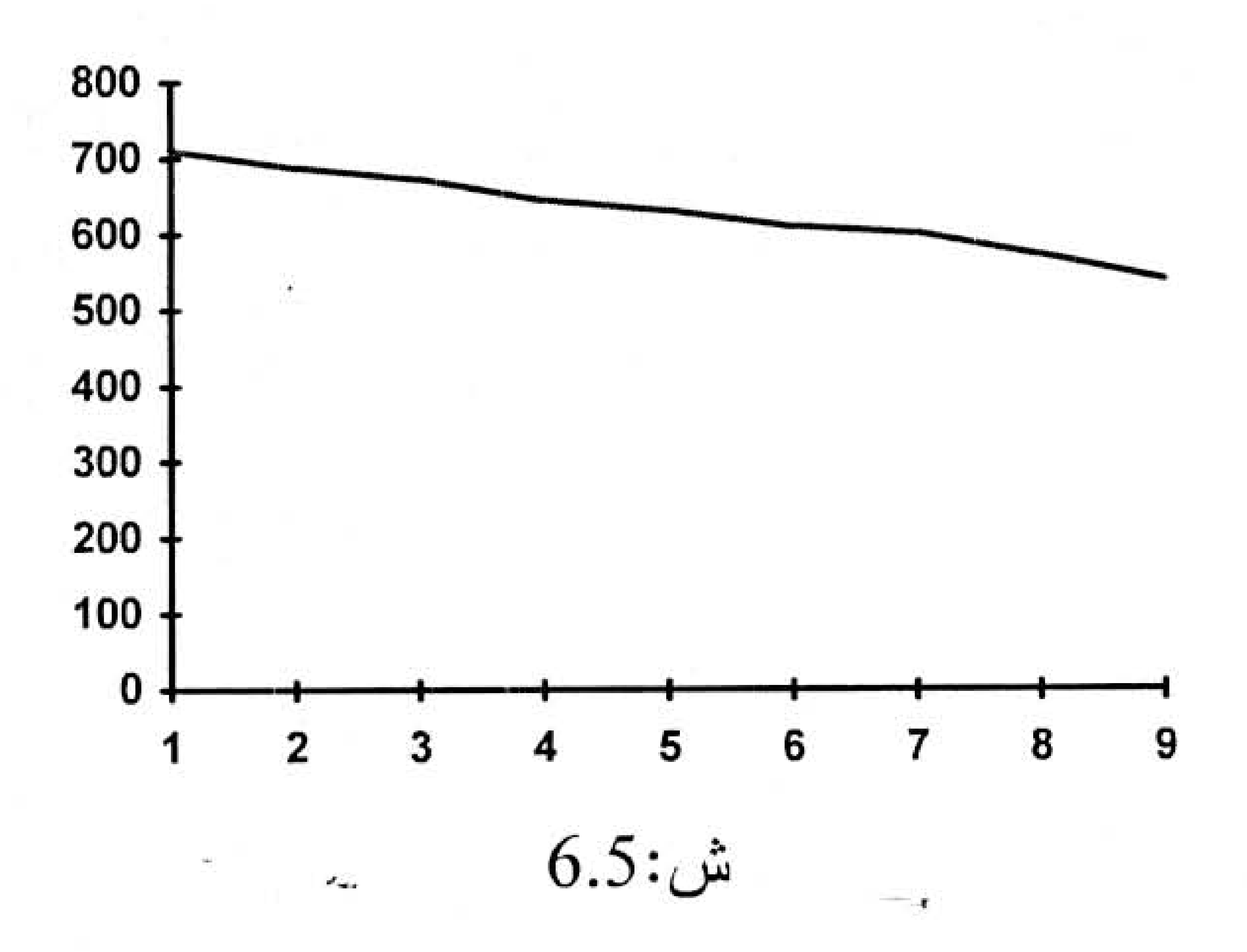
1- قدر معلمات النموذج الخطي البسيط؟.

2- أحسب معامل الارتباط؟.

3- حدد قيمة الاستثمار للسنة العاشرة؟.

4- ضع الكتابة النهائية للنموذج؟.

الحل: نحدد نوع وشكل العلاقة بين الاستثمار و الزمن من العرض البياني التالي:



ش:6.5

نلاحظ من العرض البياني أن السلسلة الزمنية لا تحتوي على المركبة الموسمية أو الدورية، كما نلاحظ أن العلاقة عكسية بين الاستثمار وعنصر الزمن، أما شكل العلاقة بين الاستثمار وعنصر الزمن فهو خطي.

1- تقدير معلمات النموذج الخطي البسيط: $y_t = x_t + u_t$

$$\bar{y} = \frac{5669}{9} = 629.88; \bar{t} = \frac{45}{9} = 5$$

$$b = \frac{\frac{27140}{9} - \frac{9+1}{2} \times 629.88}{\frac{81-1}{12}} = -20.07$$

$$a = 629.88 - (-20.07 \times 5) = 730.23$$

$$\hat{y}_t = 730.23 - 20.07.t$$

2- حساب معامل الارتباط:

$$r = \frac{\frac{\Sigma y_t \times t}{n} - \frac{n+1}{2}\overline{y}}{SD_y \times SD_t} = \frac{\frac{27140}{9} - 5 \times 629.88}{52.131 \times \sqrt{6.66}} = -0.994$$

ارتباط قوي بين المبيعات وعنصر الزمن.

3- تحديد قيمة الاستثمار في السنة العاشرة: لتحديد قيمة الاستثمار في السنة العاشرة، نستعمل نموذج الانحدار البسيط:

$$\hat{y}_{10} = 730.23 - 20.07 \times 10 = 529.53$$

4- وضع الكتابة النهائية للنموذج: تضم الكتابة النهائية للنموذج العناصر التالية:

- نموذج الانحدار الخطي البسيط.
- معامل الارتباط.
- الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة.

بعد تحديد كل من معلمات النموذج ومعامل الارتباط، نقوم بحساب الانحرافات المعيارية للمعلمات المقدرة:

$$V(u_t) = \frac{\Sigma(y_t - \hat{y}_t)^2}{T-2}$$

$$v(b) = \frac{V(u_t)}{\Sigma(t - \bar{t})^2}$$

$$v(a) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \times v(b) + \frac{V(u_t)}{T}$$

علما أن: $\hat{y}_i$ هي القيم المقدرة للظاهرة المدروسة و T عدد الفترات (السنوات).

يبين الجدول التالي القيم المقدرة للمبيعات والفرق بين هذه القيم والقيم الأصلية.

ج:6.6

$\hat{y}_i$	u_t	u_t^2
710.66	−0.16	0.0256
690.09	−2.09	4.37
670.02	1.98	3.92
649.95	−4.95	24.5
629.88	1.12	1.25
609.8	0.19	0.036
589.7	11.26	126.78
565.6	2.33	5.428
549.6	−9.6	92.16
$\sum$		258.48

$$v(u_t)=\frac{258.48}{9-2}=36.926$$

$$v(b)=\frac{36.926}{60}=0.61\Rightarrow SD_b=0.78$$

$$v(a)=25\times 0.61+\frac{36.926}{9}=19.48\Rightarrow SD_a=4.41$$

إذن الكتابة النهائية للنموذج هي كالتالي:

$$\hat{y}_t=730.23-20.07\left(\frac{n+1}{2}\right)\ :\ r=-0.994$$

$$SD_a=0.78 \qquad SD_b=4.41$$

نلاحظ وجود ارتباطا قويا جدا بين المبيعات وعنصر الزمن، كما نلاحظ أن الانحرافات المعيارية للمعلمات صغيرة جدا بالقيم المطلقة مقارنة مع قيم هذه المعلمات.

إن الهدف من هذه الكتابة هو اختبار صلاحية النموذج في عملية التنبؤ(تحديد قيم الظاهرة المدروسة في المستقبل).

ب- النوع الثاني: السلسلة الزمنية التي تحتوي على مركبة موسمية:

نستعمل طريقة المربعات الصغرى انطلاقا من جدول (Buys Ballot) لتقدير معلمات النموذج والمركبة الموسمية، وفي هذه الحالة يحتوي نموذج التنبؤ على مركبة الاتجاه العام والمركبة الموسمية.

أولا: تحديد مركبة الاتجاه العام:

نقتصر على إحدى الطريقتين التاليتين لتحديد مركبة الاتجاه العام في حالة وجود مركبة موسمية:

1- الطريقة التجريبية:(La méthode empirique)

أهم خطواتها:

أ- تحديد المتوسطات المتحركة z_t :(Méthod of moving avérages)

يمكن أن نفرق بين حالتين عند تحديد المتوسطات المتحركة:

الحالة الأولى:

عدد قيم فترة الوسط المتحرك عبارة عن عدد زوجي،في هذه الحالة نضيف القيمة التالية لفترة الوسط المتحرك ليصبح عدد القيم عددا فرديا، بحيث أن الوسط المتحرك هو عبارة عن الوسط الحسابي لنصف القيمة الأولى والأخيرة مضافا إليها بقية القيم مثلا: إذا كان $n = 4$، فإن الوسط المتحرك هو:

$$z_1 = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2}y_5}{4}$$

الحالة الثانية:

عدد قيم فترة الوسط المتحرك عبارة عن عدد فردي، في هذه الحالة، الوسط المتحرك هو عبارة عن الوسط الحسابي لهذه القيم.

ب- تحديد المعاملات الموسمية لتصحيح السلسلة الزمنية إن كانت هناك ضرورة للتصحيح، ويمكن هنا أن نميز بين ثلاثة أشكال من السلاسل الزمنية:

الشكل التجميعي، الشكل المضاعف والشكل المختلط، نقتصر هنا على الشكل الأول والثاني:

- تحديد المعاملات الموسمية في حالة نموذج مضاعف: هي عبارة عن النسبة بين القيم الحقيقية والمتوسطات المتحركة المقابلة لها:

$$c_j = \frac{y_t}{z_t}.$$

- تحديد المعاملات الموسمية في حالة نموذج تجميعي: هي عبارة عن الفرق بين القيم الحقيقية للظاهرة المدروسة و المتوسطات المتحركة

$$c_j = y_t - z_t.$$

ج- تصحيح السلسلة الزمنية الأصلية باستعمال المعاملات الموسمية المتوسطة، ويرمز لهذه المعاملات بالرمز c'_j، حيث أن القيم المصححة هي عبارة عن النسبة بين القيم الحقيقية والمعاملات الموسمية المتوسطة.

مثال: تبين السلسلة الزمنية التالية قيمة مبيعات مادة معينة خلال 5 سنوات، المطلوب ما يلي:

1- وضع العرض البياني؟.

2- حدد مركبة الاتجاه العام؟.

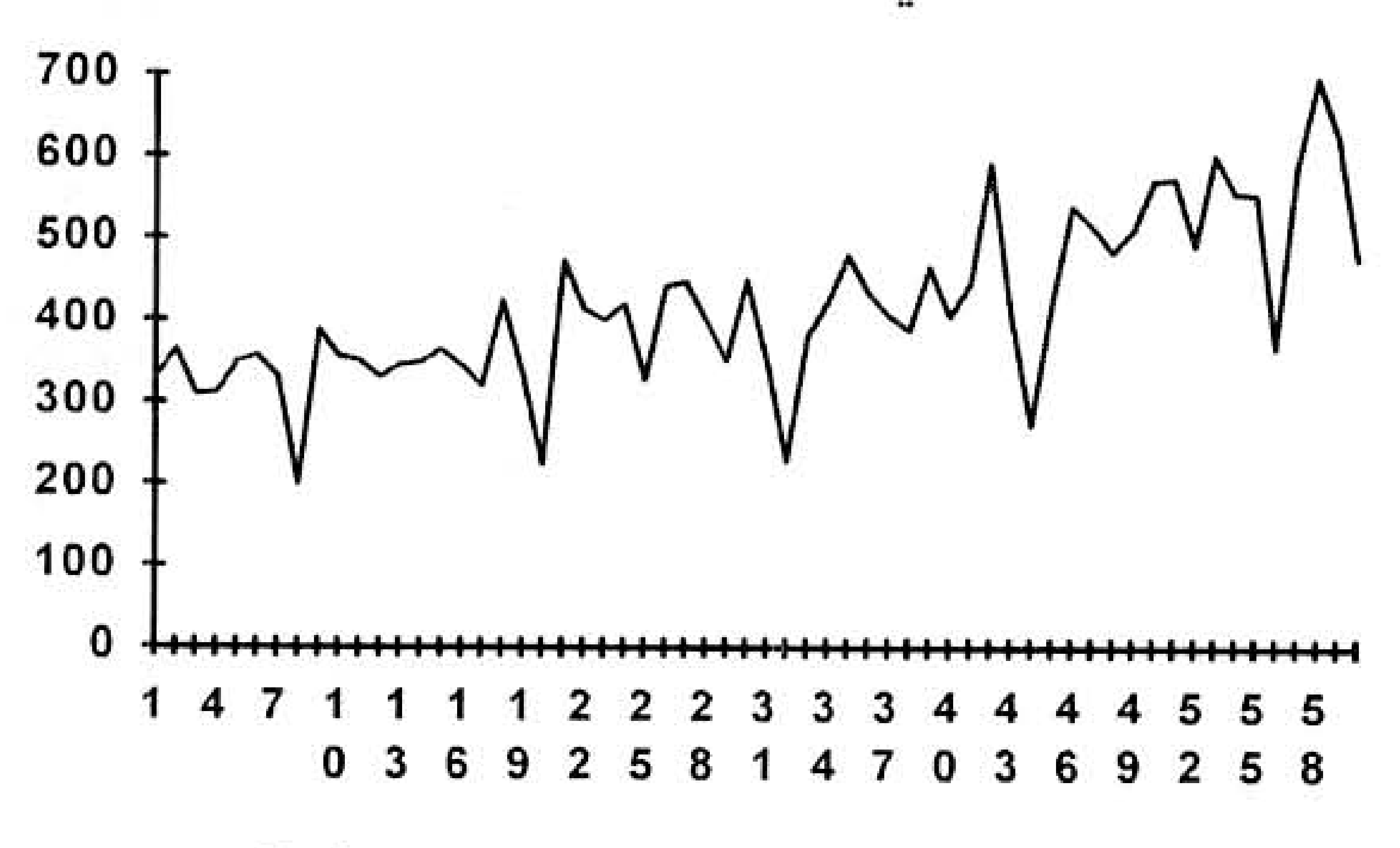
3- ضع السلسلة المصححة إن كانت هناك ضرورة للتصحيح؟.

ج:6.7

	1992	1993	1994	1995	1996
جانفي	330	346	327	406	510
فبراير	364	349	442	388	570
مارس	310	364	447	465	573
أفريل	312	345	401	405	491
ماي	350	320	351	445	602
جوان	357	423	449	591	555
جويلية	332	333	350	409	553
أوت	200	224	228	272	367
سبتمبر	388	473	381	423	588
أكتوبر	355	413	423	539	696
نوفمبر	351	400	479	515	627
ديسمبر	331	419	434	483	475

الحل:

1- العرض البياني:



ش:6.6

2- تحديد مركبة الاتجاه العام عن طريق المتوسطات المتحركة:

- حساب المتوسطات المتحركة: نفرض أن فترة الوسط المتحرك تساوي 12،

مثلا: $z_1 = \frac{330/2 + 364 + 310 + 312 + ... + 331 + 346/2}{12} = 332$ ،

بنفس الطريقة نحدد بقية المتوسطات المتحركة، كما هو مبين في الجدول التالي:

جدول المتوسطات المتحركة:

ج:6.8

	1992	1993	1994	1995	1996
1	____	342	391	410	501
2	____	343	392	415	511
3	____	348	388	418	522
4	____	354	384	425	535
5	____	358	384	431	547
6	____	368	384	443	551
7	332	367	388	449	____
8	332	370	389	461	____
9	334	377	387	473	____
10	338	383	388	482	____
11	338	386	392	492	____
12	339	389	402	497	____

حساب المعاملات الموسمية: هي عبارة عن النسبة بين قيم الظاهرة المدروسة والمتوسطات المتحركة $c_i = \frac{y_t}{z_t}$، واستعملنا هذه الصيغة، لأن النماذج المضاعفة هي أكثر النماذج استعمالا. بعد تحديد المتوسطات المتحركة، نلاحظ أن لكل شهر 4 معاملات موسمية ممكنة، ولكن الذي يهم هو متوسط هذه المعاملات c'_j(يمكن استعمال الوسيط لأنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة كما هو الحال بالنسبة لهذا المثال)، إذن يصبح لكل شهر معامل واحد، والجدول التالي يبين ذلك:

ج:6.9

	1992	1993	1994	1995	1996	c'_j
1	–	1.012	0.836	0.99	1.018	1.001
2	–	1.017	1.128	0.935	1.115	1.066
3	–	1.046	1.152	1.112	1.098	1.105
4	–	0.975	1.044	0.953	0.918	0.964
5	–	0.894	0.914	1.032	1.101	0.973
6	–	1.149	1.169	1.334	1.007	1.159
7	1	0.907	0.902	0.911	–	0.909
8	0.602	0.605	0.586	0.59	–	0.596
9	1.162	1.255	0.984	0.894	–	1.073
10	1.050	1.078	1.090	1.118	–	1.084
11	1.038	1.036	0.967	1.047	–	1.037
12	0.976	1.077	1.080	0.972	–	1.027

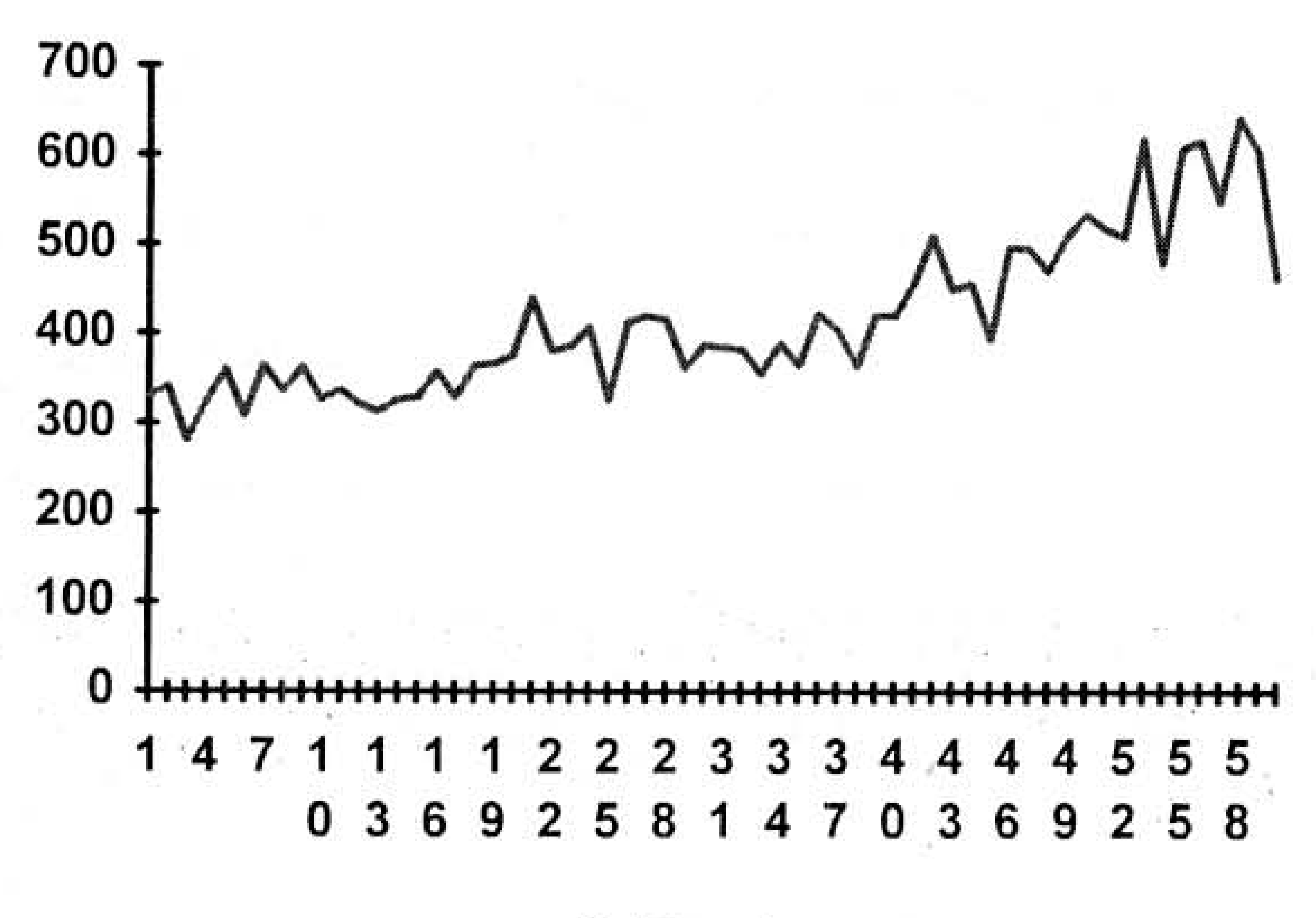
- تصحيح السلسلة العادية: نستعمل متوسط المعاملات الموسمية c'_j لتصحيح السلسلة العادية، وقيم السلسلة المصححة هي عبارة عن النسبة بين قيم السلسلة العادية ومتوسط المعاملات الموسمية حسب كل شهر. في حالة الحصول على سلسلة مصححة تحتوي على انكسارات كبيرة وهامة، نعيد نفس العملية السابقة مع تغيير في فترة الوسط المتحرك(بالزيادة أو بالنقصان ولكن بالنسبة لهذا المثال التغيير يكون نحو النقصان، وهذا حسب طريقة Shiskin).

يبين الجدول التالي السلسلة المصححة للتغيرات الموسمية:

ج:6.10

	1992	1993	1994	1995	1996
1	330	313	326	405	509
2	341	327	414	364	534
3	281	329	419	420	518
4	324	358	416	420	509
5	360	329	361	457	619
6	308	365	387	510	479
7	365	366	385	450	608
8	336	376	383	456	616
9	363	440	355	394	548
10	327	381	390	497	642
11	338	386	365	496	605
12	322	408	423	470	462


- العرض البياني للسلسلة المصححة للتغيرات الموسمية:



ش:6.7

2- **الطريقة التحليلية**: طريقة المربعات الصغرى

نقوم بإجراء تعديلات بسيطة على النموذج الخطي البسيط قصد إدخال المركبة الموسمية في نموذج السلسلة الزمنية في حالة وجود تغيرات موسمية. وتتمثل هذه التعديلات فيما يلي:

أ- تقدير معلمات النموذج:**(Estimation des paramètres du modèle)**

نقدر معلمات نموذج السلسلة الزمنية باستعمال طريقة المربعات الصغرى انطلاقا من الشكل التالي: $y_{i.j} = x_{i.j} + s_j + u_{i.j}$ حيث أن $x_{i.j} = a + b\ (j + m(i-1))$، ويكتب عنصر الزمن t بالشكل التالي $t = j + m(i-1)$ حيث أن j هو رقم الشهر أو الثلاثي أو السداسي...الخ، i رقم السنة، m عدد أجزاء السنة(الأشهر أو السداسيات أو الثلاثيات...الخ) وبناءا على ما سبق يمكن كتابة الشكل التجميعي لنموذج السلسلة الزمنية بالشكل التالي:

$$y_{i.j} = a + b\ (j + m(i-1)) + s_j + u_{i.j}\cdot$$

نفرض أن $a_j = a + s_j$ ، نضرب الطرفين في $\sum$:

$$\sum a_j = \sum a + \sum s_j \Rightarrow \sum a_j = m \cdot a + \sum s_j , \therefore \sum s_j = 0$$

$$a = \frac{\sum a_j}{m}$$

ويمكن كتابة الشكل التجميعي للسلسلة الزمنية كالتالي:

$$y_{i.j} = a_j + b\ (j + m(i-1)) + u_{i.j}$$

بحيث أن مجموع مربعات البواقي يكون أصغر ما يمكن:

$$\sum_i \sum_j u_{i.j}^2 = \sum\sum \left(y_{i.j} - a_j - b\ (j + m(i-1))\right)^2 = Min$$

1- تقدير المقدار $a_j = a + s_j$: إن هذا المقدار لا يظهر إلا في n من بين $n \times m$ حدا للمجموع المزدوج: $\frac{\partial \sum_i \sum_j u_{ij}^2}{\partial a_j} = 0$

أولا: تقدير المقدار a_j:

$$\frac{\partial \sum_i \sum_j u_{ij}^2}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - b\ (j + m(i-1)) - a_j) = 0$$

نقسم الطرفين على (2-)

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - b\ (j + m(i-1)) - a_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b\ (j + m(i-1)) + \sum_{i=1}^{n} a_j$$

:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b \times j + b \times m\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \sum_{i=1}^{n} a_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = n \times b \times j + b \times m\sum_{i=1}^{n}(i-1) + n\,a_j$$

ثم نقسم الطرفين على n:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ij}}{n} = b \times j + b \times m \frac{\sum_{i=1}^{n}(i-1)}{n} + a_j$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(i-1)}{n} = \frac{n-1}{2}; \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ij}}{n} = \overline{y}_{\bullet j}$$

$$\Rightarrow a_j = \overline{y}_{\bullet j} - b\,(j + m\frac{(n-1)}{2})$$

ثانيا: نحدد المقدار a: $a = \frac{\sum_j a_j}{m}$، بالتعويض عن المقدار a_j نحصل على مايلي:

$$a = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\overline{y}_{\bullet j} - b\,(j + m\frac{(n-1)}{2}))$$

$$a = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\overline{y}_{\bullet j} - \frac{1}{m}b\sum_{j=1}^{m}(j + m\frac{(n-1)}{2})$$

حيث أن $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m+1}{2}$، والمقدار $\overline{\overline{y}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\overline{y}_{\bullet j}$ هو عبارة عن متوسط المتوسطات السنوية أو الشهرية، وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$a = \overline{\overline{y}} - b\,\frac{(m \times n + 1)}{2}$$

ثالثا: تحديد المقدار s_j:

$$s_j = \overline{y}_{\bullet j} - b\,(j + m(\frac{n-1}{2})) - (\overline{\overline{y}} - b\,(\frac{m \times n + 1}{2})$$

$$s_j = \overline{y}_{\bullet j} - \overline{\overline{y}} - b(j - \frac{(m+1)}{2})$$

2- تقدير معامل الانحدار: b

نعوض عن قيمة a_j في المقدار التالي:

$$\sum_i^n \sum_j^m u_{ij}^2 = \sum_i^n \sum_j^m (y_{ij} - b\,(j + m(i-1)) - a_j)^2$$

$$\sum \sum_j^m u_{ij}^2 = \sum_i^n \sum_j^m \left[y_{ij} - \overline{y}_{\bullet j} - m \times b\,(i - \frac{(n+1)}{2}) \right]^2$$

نعتبر أن i ثابتة:

$$\sum_{j=1}^m u_{ij}^2 = \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \overline{y}_{\bullet j} - m \times b(i - \frac{(n+1)}{2}))^2$$

بعد عملية النشر نحصل على المقدار المعني بالاشتقاق:

$$\sum_i^n \left[(\overline{y}_{i\bullet} - \overline{\overline{y}} - b \times m(i - \frac{(n+1)}{2}) \right]^2 \text{........(1)}$$

قيمة b التي تجعل المقدار $\sum_i^n \sum_j^m u_{ij}^2$ أصغر ما يمكن هي نفسها التي تجعل(1) أصغر ما يمكن. وبعد الإشتقاق نتحصل على مايلي:

$$m \times b = \frac{12(\sum_{i=1}^{n} i \times \overline{y}_{i\bullet} - n(\frac{n+1}{2})\overline{\overline{y}})}{n(n^2-1)}$$

$$b = \frac{12(\sum_{i=1}^{n} i \times \overline{y}_{i\bullet} - n(\frac{n+1}{2})\overline{\overline{y}}}{m \times n(n^2-1)}$$

مثال: نطبق طريقة المربعات الصغرى على المثال السابق لتقدير معلمات النموذج: $y_{i.j} = a + b(j + m(i-1)) + s_j + u_{i.j}$

نلاحظ من العرض البياني للسلسلة المصححة للتغيرات الموسمية أن العلاقة خطية بين المبيعات والزمن t. يحتوي الجدول التالي(جدول Buys Ballot) على كل الحسابات الضرورية لتطبيق طريقة المربعات الصغرى:

ج:6.11

	1992	1993	1994	1995	1996	Σ	$\overline{y}_{\bullet j}$	s_j
1	330	346	327	406	510	1919	383.8	-8.37
2	364	349	442	388	570	2113	422.6	26.13
3	310	364	447	465	573	2159	431.8	31.03
4	312	345	401	405	491	1954	390.8	-14.27
5	350	320	351	445	602	2068	413.6	4.23
6	357	423	449	591	555	2375	475	61.33
7	332	333	350	409	553	1977	395.4	-22.57
8	200	224	228	272	367	1291	258.2	164.07
9	388	473	381	423	588	2253	450.6	24.03
10	355	413	423	539	696	2426	485.2	54.33
11	351	400	379	515	627	2272	454.4	19.23
12	331	419	434	483	475	2142	428.4	-11.07
Σ	3980	4409	4612	5341	6607	24949		
$\overline{y}_{i\bullet}$	331.67	367.42	384.33	445.08	550.58		415.82	
$i.\overline{y}_{i\bullet}$	331.67	734.8	1152.9	1780.3	2752.9	6752.7		

s_j : التغيرات الموسمية.

$\overline{y}_{\bullet j}$: المتوسط الشهري.

$\overline{y}_{i\bullet}$: المتوسط السنوي.

$$b = \frac{6752.75 - \frac{5 \times 6}{2} \times 415.82}{5(25-1)} = 4.3$$

$$a = 415.82 - 4.3 \times \frac{61}{12} = 393.96 \cong 394$$

$$s_1 = 383.8 - 415.82 - 4.3(1 - \frac{13}{2}) = -8.37$$

$$s_2 = 42132.6 - 415.82 - 4.3(2 - \frac{14}{2}) = 26.13$$

.

.

.

$$s_{12} = 428.4 - 415.82 - 4.3(12 - \frac{13}{2}) = -11.07$$

ويكتب النموذج بالشكل التالي: $\hat{y}_{ij} = 394 + 4.3 \times t + s_j$

ويستعمل هذا النموذج للتنبؤ بمبيعات الفترات اللاحقة.

مثلا: إذا أردنا التنبؤ بمبيعات الشهر الخامس و العاشر من سنة 1997، نستعمل النموذج السابق بالشكل التالي:

- التنبؤ بمبيعات الشهر الخامس من سنة 1997:(الشهر الخامس من السنة السادسة): $\hat{y}_{6,5} = 394 + 4.3(5 + 12(6-1)) + 4.23 = 677.73$

- التنبؤ بمبيعات الشهر العاشر من السنة السادسة:

$$\hat{y}_{6,5} = 394 + 4.3(10 + 12(6-1)) + 54.33 = 749.33$$

تمارين تطبيقية للفصل السادس

التمرين الثلاثون:

قامت مؤسسة ما بعرض منتج جديد في السوق، وكانت تهدف إلى أن تصل إلى تغطية التكاليف. ثم تبحث عن الوصول إلى مستوى 95% من المبيعات الفعلية، فمتى تصل إلى ذلك علما أنها بدأت في هذه العملية في بداية 1995. قدر معلمات النموذج عند مستوى الإشباع؟.

ج:6.12

	1995	1996
جانفي	1000	5000
فبراير	1200	5600
مارس	1350	6500
أفريل	1550	7500
ماي	1750	8800
جوان	2000	9600
جويلية	2200	10000
أوت	2600	10400
سبتمبر	3000	10700
أكتوبر	3500	–
نوفمبر	4000	–
ديسمبر	4500	–

التمرين الواحد والثلاثون:

تبين السلسلة الزمنية التالية تطور إستراد مادة معينة خلال أربع سنوات. المطلوب ما يلي:

1- حدد شكل النموذج المناسب؟.

2- حدد نوع النموذج المناسب بطريقة المتوسطات المتحركة؟.

3- قدر معلمات النموذج بطريقة (Buys Ballot)؟.

4- ضع الشكل النهائي للنموذج؟.

5- قدر قيمة الإستراد في الثلاثي الثالث لسنة 1997؟.

6- في أية فترة يتوقف الإستراد؟.

ج:6.13

	1	2	3	4
1993	40	30	32	38
1994	31	21	22	26
1995	22	12	14	21
1996	15	5	7	12

التمرين الثاني والثلاثون:

يبين الجدول التالي تطور الأوراق والقطع النقدية في الجزائر من سنة 1988 إلى سنة 1990 بملايين الدينارات، حسب التقرير السنوي لبنك الجزائر لسنة 1990:

ج:6.14

	1988	1989	1990
الثلاثي الأول	103.24	113.24	123.36
الثلاثي الثاني	104.7	114.34	128.46
الثلاثي الثالث	107.8	117.39	133.45
الثلاثي الرابع	109.7	120.6	134.97

المطلوب ما يلي:

1- حدد مركبة الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى؟.

2- حدد المعاملات الموسمية؟.

3- حدد السلسلة المعدلة للتغيرات الموسمية؟.

4- حدد التغيرات العشوائية؟.

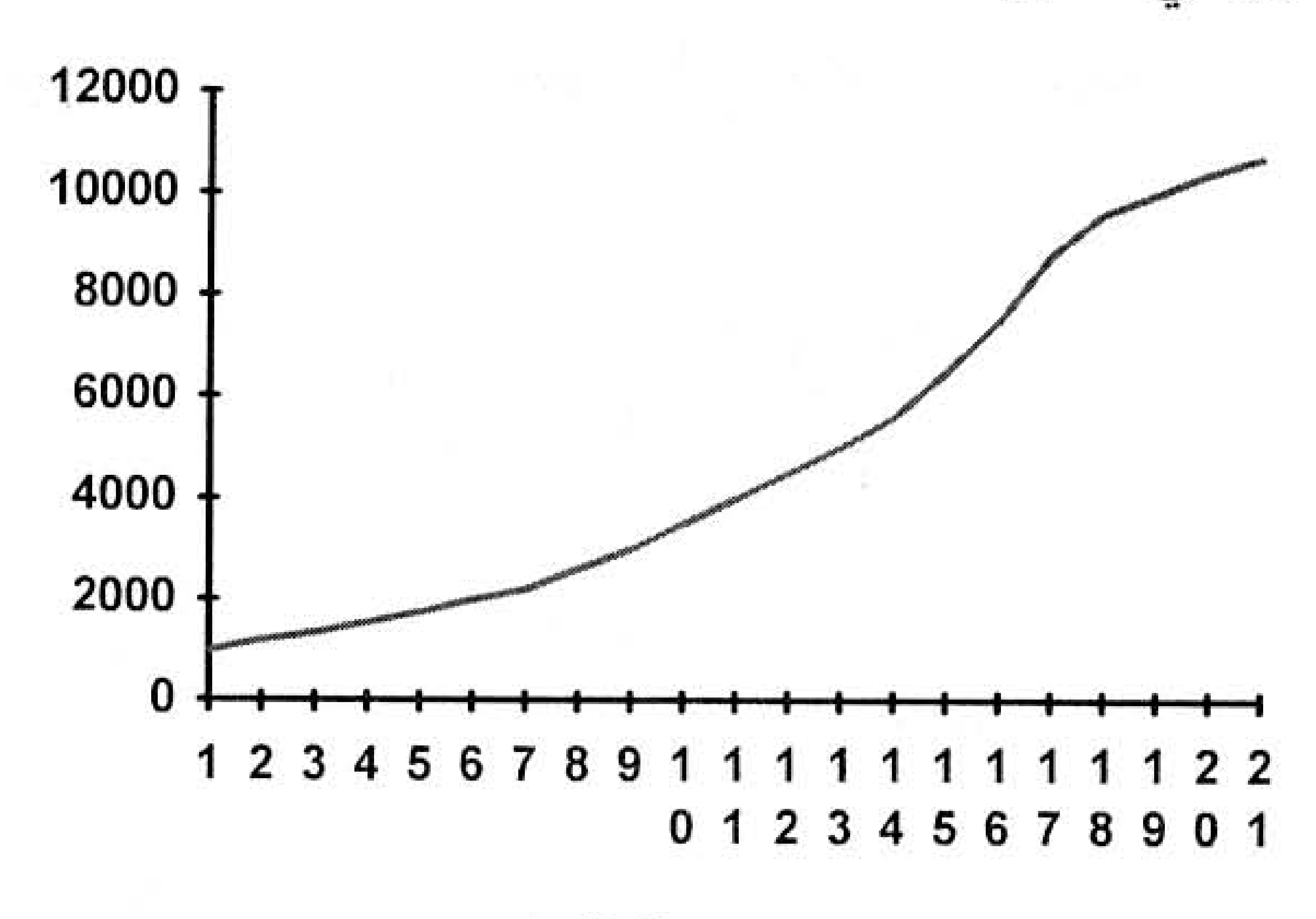
5- قدر الكتلة النقدية المتداولة في الثلاثي الثالث لسنة 1993؟.

6- ضع العرض البياني للسلسلة الأصلية و السلسلة المقدرة وأخيرا السلسلة المعدلة للتغيرات الموسمية؟.

حل التمارين التطبيقية للفصل السادس

التمرين الثلاثون:

1- العرض البياني للمبيعات:



ش:6.8

نلاحظ أن المبيعات الشهرية لا تتأثر بالتقلبات الموسمية(لا توجد مركبة موسمية). كما نلاحظ أن لها اتجاه متسارع حتى شهر ماي 1994 ثم تباطؤ ناتج عن الإشباع المتزايد للسوق. حسب هذا التزايد المتسارع ثم التزايد المتباطئ وأخيرا الإشباع، وحسب شكل المنحنى المتحصل عليه، يمكن تقريب دالة المنحنى إلى نموذج سوقي (لوجستيك): $y_t = \dfrac{Max(y_t)}{1 + a \times e^{b.t}}$

حيث أن:

- y_t : حجم المبيعات في الفترة t.
- $Max(y_t)$: حجم المبيعات عند مستوى الإشباع.
- a ،b :معلمات النموذج.

2- تقدير معلمات النموذج:

لا يمكن تقدير النموذج بشكله الحالي إلا بعد الانتقال إلى الشكل الخطي، لأنه لا يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى إلا على النماذج الخطية.

أ- الانتقال من النموذج غير الخطي إلى النموذج الخطي:

$$\frac{Max(y_t)}{y_t} = 1 + a\, e^{bt}$$

$$a\, e^{bt} = \frac{Max(y_t)}{y_t} - 1$$

ندخل اللوغارتم النيبري على الطرفين:

$$\ln\left[\frac{Max(y_t)}{y_t} - 1\right] = \ln a + b \cdot t$$

ننتقل إلى الأساس العشري، و نفرض أن x_t يساوي الطرف الأول من المقدار السابق: $x_t = \log(\frac{Max(y_t)}{y_t} - 1) = \log a + b \log e$ ، نضع:

$a_1 = \log a$ ، $b_1 = b \cdot \log e$ ، ويصبح النموذج الخطي بالشكل التالي:

$$x_t = a_1 + b_1 t + u_t$$

وبغياب معلومات كافية عن القيمة العظمى لـ: y_t يمكن إعطاءها قيما حتى نصل إلى مستوى الإشباع.

ب- تقدير معلمات النموذج الخطي البسيط:

حسب قيم جدول المعطيات، وحسب العرض البياني، نفرض أن القيمة العظمى التي تحقق مستوى الإشباع هي $Max(\bar{y}_t)=15000$ وبعد تحديد هذه القيمة، نحدد قيم x_t وقيم $x_t \cdot t$ في الجدول التالي:

ج:6.15

T	x_t	$x_t \cdot t$
1	1.146	1.146
2	1.06	2.12
3	1	3
4	0.93	3.75
5	0.87	4.39
6	0.81	4.87
7	0.76	5.35
8	0.67	5.42
9	0.6	5.41
10	0.51	5.16
11	0.44	4.83
12	0.36	4.41
13	0.3	3.91
14	0.22	3.149
15	0.116	1.747
16	0	0
17	−0.15	−2.58
18	−0.24	−4.49
19	−0.3	−5.71
20	−0.35	−7.08
21	−0.39	−8.31

$$\bar{x} = \frac{\sum x_t}{n} = \frac{8.376}{21} = 0.398$$

$$\bar{t} = \frac{n+1}{2} = \frac{21+1}{2} = 11$$

$$\frac{\sum t_i^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{19866}{126} = 157.66$$

$$b_1 = \frac{1.45 - 0.398 \times 11}{157.66 - 121} = \frac{-2.93}{36.66} = -0.08$$

$$a_1 = 0.398 - (-0.08) \times 11 = 1.279$$

$$x_t = 1.279 - 0.08t$$

ج- تحديد معامل الارتباط:

$$r = \frac{-2.934}{6.055 \times 0.485} = -0.997$$

ملاحظة: يجب أن تكون b_1 سالبة وإلا فلا معنى للنموذج الأصلي.

يمكن مواصلة العملية بإعطاء قيما لـ y_t، حيث تتوقف هذه العملية على قيمة معامل الارتباط، فإذا تحسنت قيمة معامل الارتباط، نأخذ بعين الاعتبار القيمة الجديدة لـ y_t، أما إذا لم تتحسن فنحافظ على القيمة الأولى.

د- كتابة الشكل الأصلي للنموذج:

$$a_1 = \log a = 1.279 \Rightarrow a = 10^{1.279} = 19$$

$$b_1 = b \log e = -0.08 \Rightarrow b = \frac{b_1}{\log e} = \frac{-0.08}{0.434} = -0.184$$

$$y_t = \frac{Max(y_t)}{1 + a e^{bt}} = \frac{15000}{1 + 19e^{-0.184t}}$$

3- تحديد التاريخ التي تصل فيه المؤسسة إلى تغطية 95% من المبيعات، أي 95% من مستوى الإشباع:

$$y_t = 95\%.\,15000 = \frac{15000}{1+19e^{-0.184t}}$$

$$1+19.e^{-0.184.t} = \frac{100}{95} = 1.0526 \Rightarrow e^{-0.184.t} = \frac{0.0526}{19}$$

$$-0.184.t\ .\log e = \log 0.0526 - \log 19 \Rightarrow t_{95\%} = 31.97$$

تصل المؤسسة إلى تغطية 95% من مستوى الإشباع في الشهر 32 تقريبا، أي في شهر أوت من سنة 1997.

التمرين الواحد والثلاثون:

1- تحديد شكل النموذج المناسب بطريقة المتوسط السنوي:

يبين الجدول التالي الفروق بين المتوسط السنوي وقيم السلسلة الزمنية.

ج:6.16

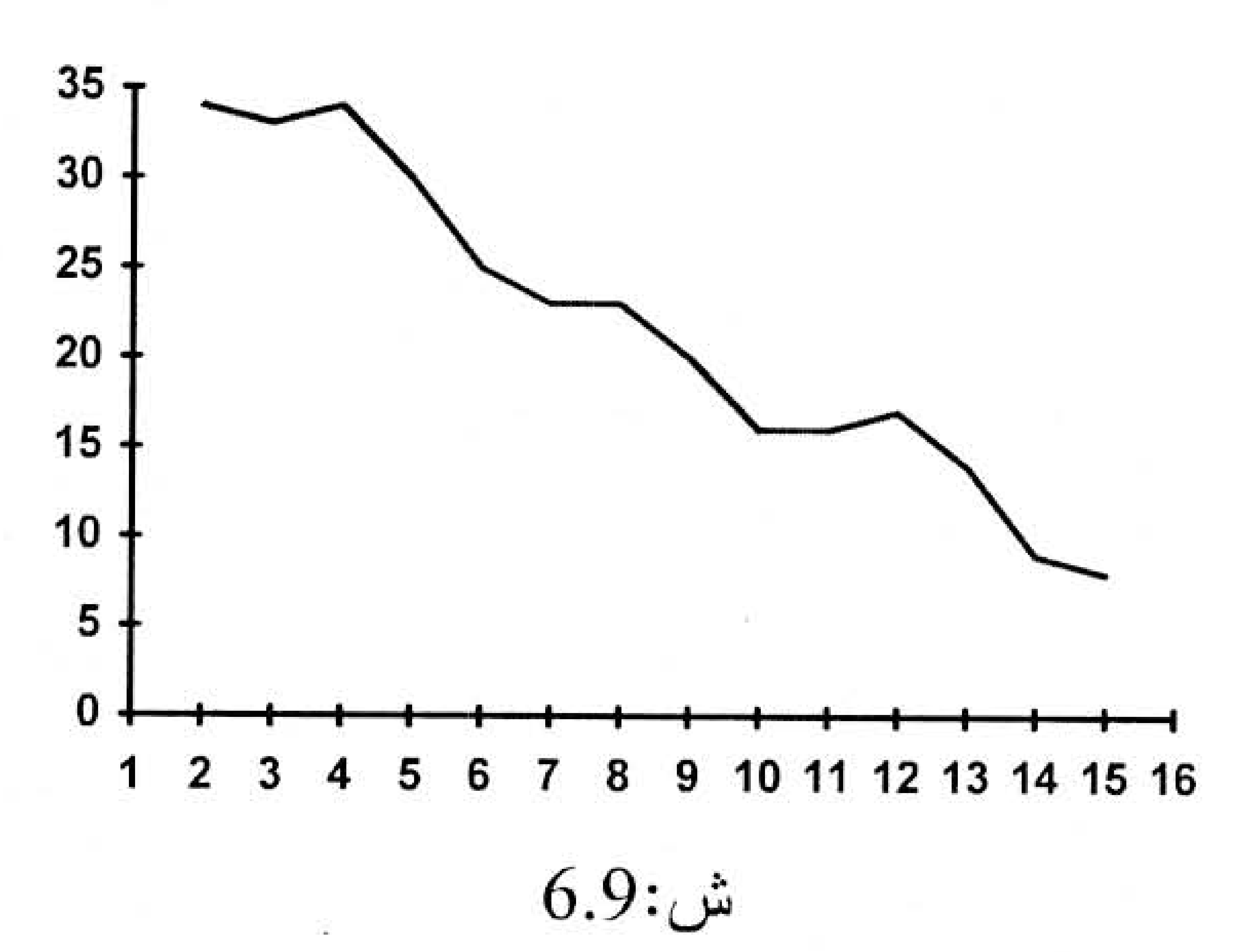
	$Y_{i\bullet}$	1	2	3	4
1993	35	5	−5	−3	3
1994	25	6	−4	−3	1
1995	17.25	4.75	−5.25	−3.25	3.25
1996	9.75	5.25	−4.75	−2.75	2.25

نلاحظ أن الفروق المتحصل عليها مبعثرة وغير ظاهرة، نفضل في هذه الحالة النموذج المضاعف.

2- تحديد الاتجاه العام لتطور الإستراد بطريقة المتوسطات المتحركة حسب الجدول التالي:

ج:6.17

	1	2	3	4
1993	–	34	33	34
1994	30	25	23	23
1995	20	16	16	17
1996	14	9	8	–



ش:6.9

يعتبر الاتجاه العام لهذه الظاهرة خطي انطلاقا من العرض البياني.

3- تقدير معلمات النموذج باستعمال جدول (Buys Ballot):

ج:6.18

	1	2	3	4	$\bar{y}_{i\bullet}$	$i\cdot\bar{y}_{i\bullet}$
1993	40	30	32	38	35	35
1994	31	21	22	26	25	50
1995	22	12	14	21	17.25	51.75
1996	15	5	7	12	9.75	39
$\bar{y}_{\bullet j}$	27	17	18.75	24.25		175.75
s_j	2.1	−5.8	−195	5.65		

$$b = \frac{12(175.75 - 4\times 2.5\times 21.75}{4\times 4(16-1)} = -2.1$$

$$a = 21.75 - (-2.1)\frac{17}{2} = 39.6$$

4- الشكل النهائي للنموذج: $\hat{y}_t = 39.6 - 2.1\big(j + 4(i-1)\big) + s_j$

5- تقدير قيمة الإستراد في الثلاثي الثالث لسنة 1997:

$$\hat{y}_{5.3} = 39.6 - 2.1\big(3 + 4(5-1)\big) - 1.95 = -2.25$$

هذه النتيجة تعبر عن توقف الإستراد.

6- يتوقف الإستراد في بداية سنة1997.

التمرين الثاني والثلاثون:

1- تحديد مركبة الاتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى:

ج:6.19

t	y_t	$t \cdot y_t$	x_t	Y'_t	u_t	Y^*_t
1	103.2	103.2	101.3	107.5	6.2	97
2	104.7	209.5	104.3	106.6	2.33	102.4
3	107.8	323.4	107.2	105.8	−1.4	109.2
4	109.7	438.8	110.2	105.5	−4.7	114.4
5	113.2	566.2	113.1	117.5	4.35	108.9
6	114.3	686.1	116.1	116.2	0.08	114.2
7	117.4	821.8	119.1	115.4	−3.66	121
8	120.6	964.8	122	116.4	−5.62	126.2
9	123.4	1110.3	125	127.6	2.63	120.7
10	128.4	1284.6	127.9	130.3	2.36	126
11	133.4	1467.9	130.9	131.5	0.56	132.9
12	134.98	1619.7	133.8	130.8	−3.1	138
Σ		9596.4				

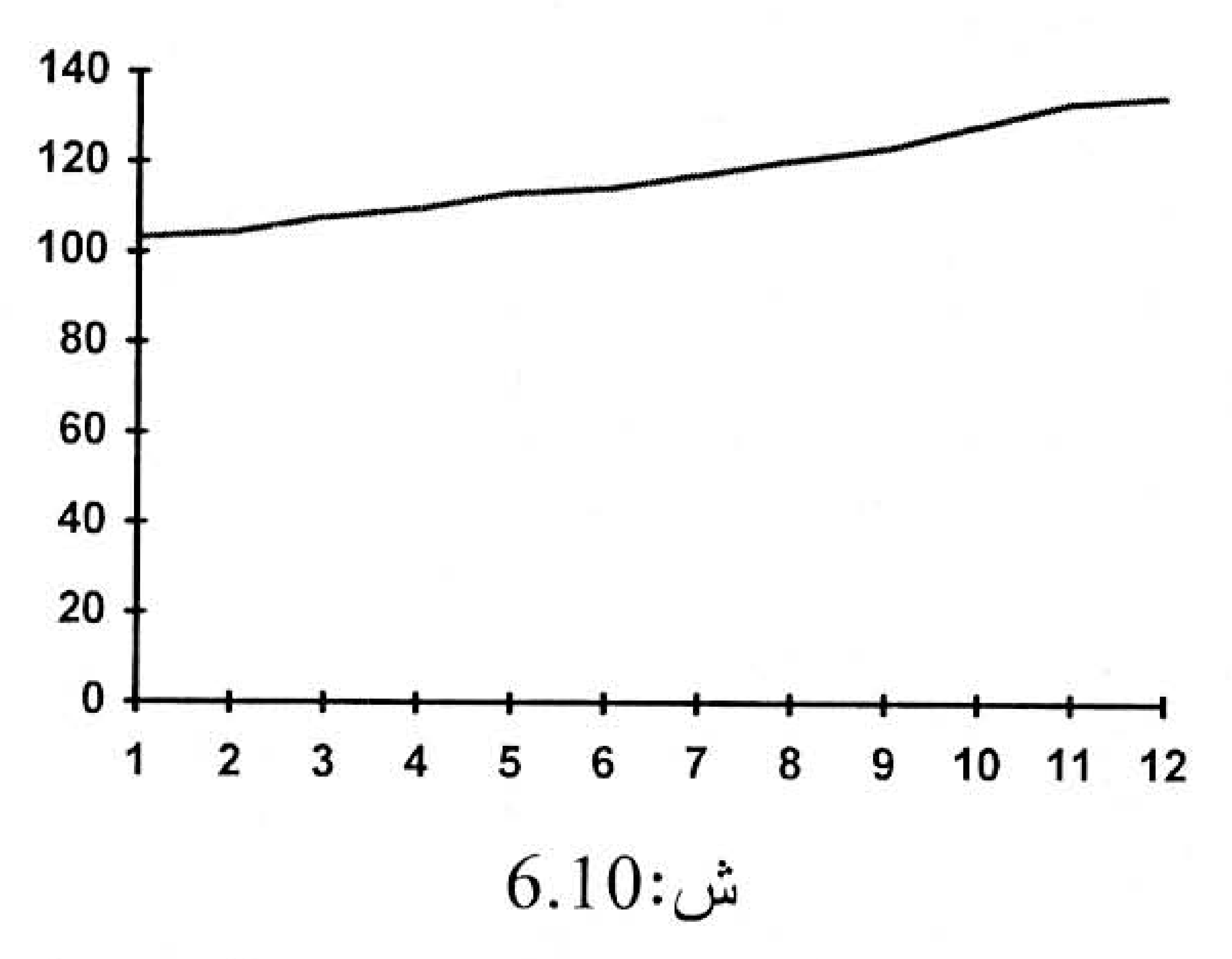
أ- تقدير معلمات النموذج الخطي البسيط :

$$b = \frac{\frac{9596.4}{12} - 6.5 \times 117.6}{\frac{650}{12} - 42.25} = \frac{35.3}{11.9} = 2.96$$

$$a = 117.6 - 2.96 \times 6.5 = 98.34$$

النموذج الخطي البسيط لهذه السلسلة الزمنية هو: $Y_t^* = 98.34 + 2.96 \times t$

2- حساب المعاملات الموسمية: قبل تحديد هذه المعاملات نضع العرض البياني للسلسلة الأصلية:



ش:6.10

السلسلة الزمنية عبارة عن خط مستقيم، ولا تحتوي على تغيرات موسمية. بناءا على نتيجة إجابة السؤال الثاني،لا معنى للإجابة على بقية الأسئلة.

5- تقدير الكتلة النقدية في الثلاثي الثالث لسنة 993:

$$Y_{3.1993} = 98.34 + 2.96\times 23 = 166.47$$

Table de nombres aléatoires جدول الأعداد العشوائية

43645	89232	00384	10858	21789	14093	06268	46460	97660	23490
61618	19275	40744	22482	12424	98601	19089	53166	41836	28205
68136	06546	04029	47946	19526	27122	42515	55048	23912	81105
74005	34558	93779	96120	01695	47720	88646	73520	40050	90553
54437	88825	07943	81795	31709	13358	04626	64838	92133	44221
01990	94762	89926	84764	19159	95355	98213	17704	47400	30837
02404	42408	67981	43684	55467	47030	42545	43920	11199	36521
59253	71535	26149	35626	87127	45581	00185	01041	46662	98897
20471	13914	99330	37938	69649	57964	97149	41628	78664	80727
65946	60766	74084	22484	49514	89820	41310	19722	07045	28808
00939	47818	75949	44707	49105	06777	31998	79942	98351	10265
49952	29123	45950	67578	13524	03023	18046	75287	74989	58152
17328	70732	46319	26950	19037	02831	36558	82712	05590	64941
19420	70215	90476	76400	51553	12158	14668	15656	37895	94559
19121	41190	49145	05373	00755	17817	22757	76116	76977	94570
44300	56179	71202	49238	83682	21989	63268	74644	53625	10791
99403	96757	34512	06475	89028	00290	93766	70812	98331	09611
78578	51589	83195	56332	75076	58202	58038	38817	63835	13486
89830	60177	94550	10119	09083	33398	29974	67721	75037	70444
89502	83947	99940	60969	79452	91472	12611	41681	95285	44153
11187	95096	50369	94874	19853	06933	69767	88842	35676	49766
47886	49549	64465	14508	28215	47766	03076	25940	47239	93425
21325	89726	96964	66106	68517	67954	16570	72433	91514	79333
59927	79213	96072	64540	59002	26619	02930	83677	26442	97346
44232	30754	59691	34893	92531	70313	24969	14458	91409	79369
15956	31379	21224	20366	74348	66239	32704	41018	31937	84961
58597	14598	23589	50700	96194	15831	08968	45321	04237	34438
99185	70628	95475	94156	39588	57825	36521	85188	64339	27460
20986	57081	53928	47768	18313	82950	12335	32298	08662	54552
75371	04678	96443	72965	68012	52485	55139	73430	74306	85960
75775	60178	51110	30735	29761	39565	45332	13671	69405	11186
91592	54102	25242	00063	42467	23339	55311	81275	08602	03508
16106	87812	92476	07849	65510	77763	33684	77092	32490	40345
30754	57054	12611	21455	01332	33101	64795	56555	84390	12982
63826	14146	40993	93849	49799	41080	48621	29555	83653	07742
18068	54879	36271	24773	63615	60309	30550	16184	71605	64267
32512	08155	27597	59844	95648	71896	63075	86078	61746	26669
21339	99336	18200	57564	39356	15173	53051	87654	13346	62350

قائمة المراجع

● **باللغة العربية:**

1. علي محمد الأطرقجي، الوسائل التطبيقية في الطرق الإحصائية، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، 1980.
2. أنيس كانجو، الإحصاء وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي، مؤسسة الرسالة بيروت، 1980.
3. إبراهيم محمد علي، مدخل في نظرية الارتباط، كلية الاقتصاد والتجارة، حلب (سوريا)، 1980.
4. محمد فرير منفيخي، مبادئ الإحصاء، مطبعة طربين، دمشق، 1981.
5. أنيس كانجو، الإحصاء،الجزء الأول، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1982.
6. مختار محمود الهنسي، مقدمة الطرق الإحصائية، دار النهضة العربية، بيروت(لبنان)، 1982.
7. عبد الرحمان عدس، مبادئ الإحصاء في التربية و علم النفس، مكتبة النهضة الإسلامية، عمان (الأردن)، 1982.
8. دومنيك سالفتور، الإحصاء والاقتصاد القياسي، سلسلة ملخصات شوم، 1982.
9. عزالدين جوني، الإحصاء الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1983.
10. محمد صبحي أبو صالح، مقدمة في الإحصاء، د.م.ج، الجزائر، 1984.
11. محمد كلاس، محاضرات في الإحصاء التطبيقي، د.م.ج، الجزائر، 1984.
12. عبد القادر حليمي، مدخل في الإحصاء، د.م.ج، الجزائر، 1985.
13. عبد العزيز فهمي هيكل، مبادئ في الإحصاء التطبيقي، دار الجامعة، بيروت، 1985.

• باللغات الأجنبية:

1. Amzallag.Emile, Piccioli.Norbert: Introduction à la statistique, exercices corrigés Herman, Paris, 1978.
2. Bailly.P: Exercices corrigés de statistique descriptive, O.P.U, Alger, 1993.
3. Ben Saber.A: Pratique des chroniques et de la prévision à court terme, Masson, Paris, 1989.
4. Ben yaklef.M: Probabilités et statistique mathématique, Tome 1, Press des éditions maghrébins, Casablanca, 1977.
5. Blumenthal.Serge: Q.C.M de statistique, Paris, 1992.
6. Boursin.J.L: Statistique (sondage & estimation), Vuibert, Paris, 1981.
7. Bowers.D: Statistics for economics and business, MacMillan education L.T.D, London, 1991.
8. Chauvat.Gérard: Statistique descriptive, Paris, 1992.
9. Clarke.G.M and Cooke.D: A basic course in statistics, third edition, Edward Arnold, London, 1992.
10. Droesbeke.Jean-Jacques: Eléments de statistique,O.P.U, Alger, 1988.
11. Dubos.J: Statistique descriptive en sciences économique avec exercices corrigés, Dunod, Paris, 1980.
12. Duck Worth.W.E: Méthodes statistiques de la recherche technologique, Dunod, Paris, 1973.
13. Dussaix.Anne-Marie: Méthodes statistiques appliquées à la gestion, Essec, Paris, 1979.
14. Duthil.G: Les statistiques descriptives appliquées à l économie de l entreprise, l Harmattan, Paris, 1990.
15. Fourastié.Jacqueline: Statistique appliquée à l économie, Masson, Paris, 1982.
16. Fourastié.Jacqueline: Les Indices statistiques, Masson, Paris, 1984.
17. Giard.Vincent:Statistique appliquée à la gestion, Economica, Paris, 1982.
18. Gobry.Pascal: La Bourse aux indices, Economica, Paris, 1988.
19. Goldfarb.B: Introduction à la méthode statistique, Dunod, Paris, 1993

20. Goujet.Christian, Statistique descriptive appliquée à la gestion avec exercices corrigés, Eyrolles, Paris, 1992.
21. Grais.Bernard: Techniques statistiques,Dunod, Paris, 1981.
22. Grais.Bernard: Méthodes statistiques, Dunod, Paris, 1984.
23. Hodges.J.L, David Krech.J.R, Stat-Lab, Economica, Paris, 1979.
24. Kane.E.J: Statistique économique et Econométrie, Armand Collin, Paris, 1971.
25. Labrousse.C: Statistique, exercices corrigés, Tome 1 à 3, Dunod, Paris, 1972.
26. Lancry.P.J: statistique, étude de cas, Economica, Paris, 1983.
27. Lancry.P.J: Statistique appliquée, Delagrave, Paris, 1985.
28. Lecontre.J.P: statistique, exercices corrigés avec rappels de cours, Masson, Paris, 1990.
29. Lessard.Sabin, Monga: Statistique, P.U.M, Montréal, 1993.
30. Marciano.J.P: Statistique et prévision, Librairie de l Université Aix-en Provence, 1983.
31. Masieri.Walder: Méthodes quantitatives, La Ville-Guérin ed, Paris, 1991.
32. Mc.Gee (V.E): Principes de statistique ; approches traditionnelle et bayéssienne, Vuibert, Paris, 1975.
33. Mialaret.Gaston: Statistique appliquée aux sciences humaines, Paris, 1991.
34. Monjallon.Albert: Eléments de statistique mathématique, Vuibert, Paris, 1963.
35. Monjallon.Albert: Introduction à la méthode statistique, Vuibert, Paris, 1980.
36. Morice.E: Dictionnaire de statistique, Col.M.Bertrand, Dunod, Paris, 1968.
37. Piatier.André: Statistique, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
38. Piganiol.B: Cas et exercices avec solutions de statistique, Dalloz, Paris, 1973.
39. Piganiol.B: Statistique & Econométrie, cas et exercices avec solution, Dalloz, Paris, 1980.
40. Py. Bernard: Exercices corrigés de statistique descriptive, Economica, Paris, 1990.

41. Quairel-Lanoizelée.F: Analyse financière, mathématique, statistique, Istra, Paris, 1987.
42. Rouanet.H: Statistique en sciences humaines, Dunod, Paris, 1987.
43. Saporta.G: Théories et méthodes de la statistique, I.A.P français,1978.
44. Schlacther.Didier: De l analyse à la prévision, Axes, Paris, 1980.
45. Schlacther.Didier: De l analyse à la prévision, ed Marketing, Paris,1986.
46. Souvay.Pierre: La statistique outil de la qualité, Afnor gestion, Paris, 1986.
47. Spiegel.Murray.R: Théory and problems of probability and statistics, by Mc.Graw-Hill, New York, U.S.A, 1975.
48. Tassi.Phillipe: Méthodes statistiques, Economica, Paris, 1989.
49. Vogt.Aimé: Méthodes statistiques, Sirey, Paris, 1977.
50. Zajdenweber.D: Prévision à court terme, Dunod, Paris.
51. Maurice Lethielleux, Statistique descriptive, 5ème édition, Dunod, Paris,2007.
52. Bernard Py, statistique descriptive, nouvelle méthode pour bien comprendre et réussir, 5ème édition, Economica, Paris, 2007.
53. Bernard Delmas, statistique descriptive pour l'économie et la gestion, Presses Universitaires du Septentrion, Paris, 2009.
54. Elisabeth Olivier, l'essentiel de statistique descriptive, Gualino Editeur, Paris, 2008.
55. Agnès Hamon et Nicolas Jegou, statistique descriptive, PU Rennes, Didact statistique, 2008.
56. Jean-Claude Kahané, et Rolland Gillet, statistique descriptive, Pearson Education, Paris, 2008.

الفهرس

أنجز طبعه على مطابع

ديوان المطبوعات الجامعية

1، الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر

جلاطو جيلالي

الإحصاء

مع

تمارين و مسائل محلولة





ديوان المطبوعات الجامعية